BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x(1 - \ln x)$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

Partie I : Étude de la fonction f.

1) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4) Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

a) Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A', point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire.

Soit α un nombre réel strictement positif.

On note $A(\alpha)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \mathrm{e}$.

1) Justifier que $A(\alpha) = \left|\int_{\alpha}^{\mathrm{e}} f(x)\,dx\right|$, en distinguant le cas $\alpha < \mathrm{e}$ et le cas $\alpha > \mathrm{e}$.

2) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\alpha)$ en fonction de α.

EXERCICE 2 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe 2 (à rendre avec la copie) une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1) a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n - 1 > 0$.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question **1) b)**

3) Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathscr{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

1) a) Le point $C\,(1\,;\,3\,;\,2)$ appartient-il au plan $(\mathscr{P})$? Justifier.

b) Démontrer que la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.

2) Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (Q) et de la droite $(\mathscr{D})$.

c) Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3) Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1\,;2t\,;-t+2)$.

a) Vérifier que pour tout nombre réel t, $CM_t^{\,2} = 6t^2 - 12t + 9$.

b) Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.

a) Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.
Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ, puis construire le point A.

b) On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3}+1\right)$.
Justifier que le point B appartient au cercle Γ.

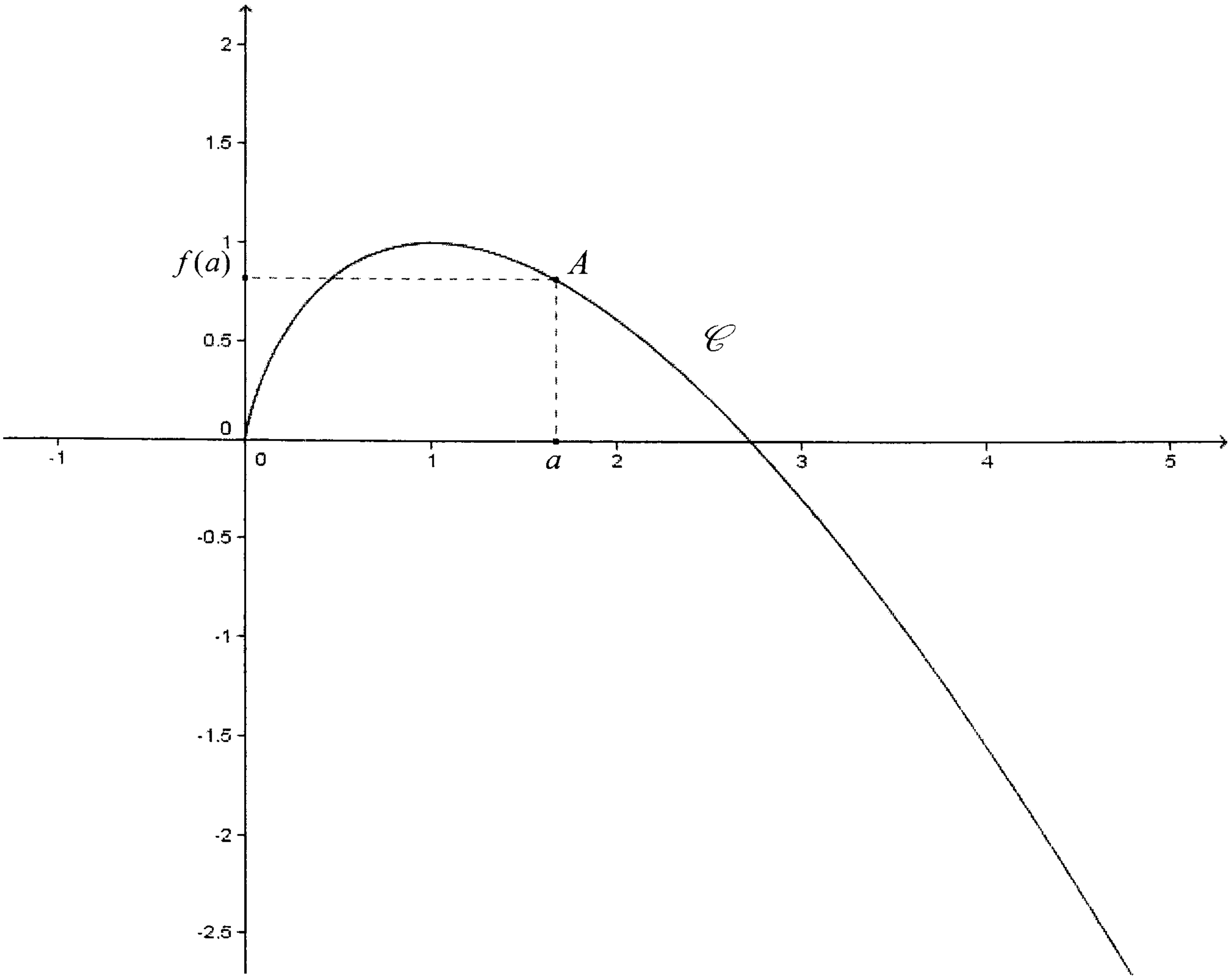
c) Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

d) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.

Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ?
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 2 (Exercice 2)
(à rendre avec la copie)