Baccalauréat S Pondichéry 21 avril 2010

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b \left[f(t)+g(t)\right]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \ln\left(1+x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0\,;\,+\infty[$.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   (Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :
   pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n)
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x.$$

   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de g sur $[0\,;\,+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a

$$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n.$$

   c. En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une dé monstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+2 \\ y & = & -2t \\ z & = & 3t-1 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives
$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 2-3t \\ y & = & 1+t \\ z & = & -3+2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 7+2u \\ y & = & 2+2u \\ z & = & -6-u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.
4. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1~;~0~;~2)$, B, de coordonnées $(1~;~4~;~0)$, et C, de coordonnées $(3~;~-4~;~-2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.
5. On considère les points :
A, de coordonnées $(-1~;~1~;~3)$, B, de coordonnées $(2~;~1~;~0)$, et C, de coordonnées $(4~;~-1~;~5)$.
On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples $(a,~b)$ d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3$$

Soit $(a,~b)$ un tel couple et $d = \text{PGCD}(a,~b)$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = dv^3$.
2. En déduire que v divise u, puis que $v = 1$.
3. Soit $(a,~b)$ un couple d'entiers strictement positifs.
Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse. sera prise en compte dans l'évaluation.*

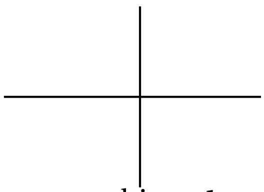
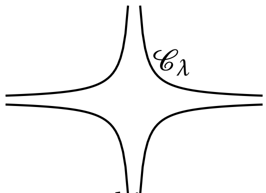
   Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0 \quad [7]$ ou $n \equiv 1 \quad [7]$.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.
Pour tout réel λ, on note $\mathscr{C}_\lambda$ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de $\mathscr{C}_\lambda$ tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.

   Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.

	(pas de courbe visible)	
graphique 1	graphique 2	graphique 3

2. **a.** Déterminer le nombre de points de $\mathscr{C}_{25}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

   b. *Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question* 3 *de la partie A.*

   Déterminer le nombre de points de $\mathscr{C}_{2010}$ dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

   a. Démontrer que : $P(X = -1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

   b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à $0,999$.

3. On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.

b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4,\ \ u_n \geqslant 0$.

b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n - 3$.

c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.