

∞ Baccalauréat S Amérique du Nord 3 juin 2010 ∞

EXERCICE 1

4 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(1 ; -2 ; 4) \quad B(-2 ; -6 ; 5) \quad C(-4 ; 0 ; -3).$$

1.
 - a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1 ; -1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 - c. Déterminer une équation du plan (ABC).
2.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
 - b. Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.
 - a. Démontrer que $t = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$.
 - b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

EXERCICE 2

3 points

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

- a. Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
- b. Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 3**5 points****Enseignement obligatoire**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1 .

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .
3.
 - a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , $(z' + 2i)(z - i) = 1$.
 - b. En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) :

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4.
 - a. Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
 - b. En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E' associé au point E par l'application f . On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD' E' ?

EXERCICE 3**5 points****Enseignement de spécialité****Partie A**

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation

$$(E): 16x - 3y = 4.$$

1. Vérifier que le couple $(1, 4)$ est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} z.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.

On note z_n l'affixe du point M_n .

Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .
2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.
 - a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g .
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n , $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que $(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
 - c. Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6 .
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $z_n = (\sqrt{2})^n e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8})}$.
4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.
 - a. Exprimer en fonction de n et p une mesure de $(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n})$.
 - b. Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. On pourra utiliser la partie A.

EXERCICE 4

8 points

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}.$$

On désigne par \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Les courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1. Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.
2.
 - a. Démontrer que la courbe \mathcal{C}_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
 - b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 - c. Démontrer que pour tout réel x , $0 < f_1(x) < 4$.
3.
 - a. Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7 ; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}_1 .
 - b. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe \mathcal{C}_1 au point I_1 .

- c. Tracer la droite (T_1) .
- 4. a. Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .
- b. Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0 ; \ln 7]$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n .

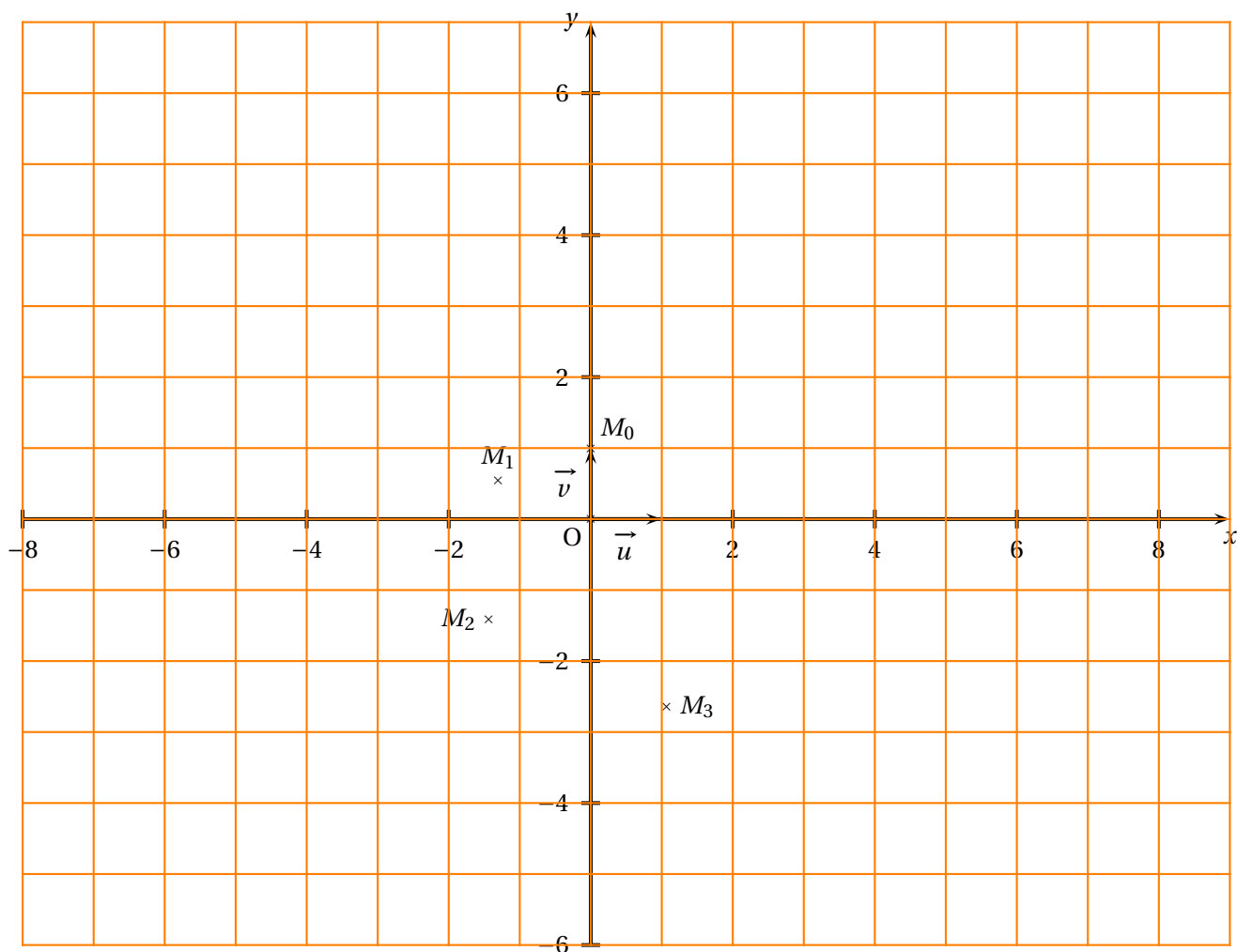
1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe \mathcal{C}_n .
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe \mathcal{C}_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse.
On note I_n ce point d'intersection.
- b. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe \mathcal{C}_n au point I_n .
- c. Tracer les droites (T_2) et (T_3) .
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x) dx.$$

Montrer que la suite (u_n) est constante.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3 (enseignement de spécialité)



Exercice 4

