Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathscr{D}_1) \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathscr{D}_2) \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées $(2 ; -1 ; 3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D}) \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0003$.

On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Affirmation :
La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2000 heures est inférieure à 0,5.

Question 4

A et B sont deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0{,}4,\ p_A(B) = 0{,}7,\ \text{et}\ p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}1.$$

Affirmation :

La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$.

Exercice 2 (5 points)

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a = -1$ et l'application f, du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même, qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $M' = f(M)$ d'affixe : $z' = \dfrac{\mathrm{i}\, z}{z+1}$.

1. Déterminer l'affixe des points M tels que $M' = M$.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de A et de O, on a :

$$OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

3. a) Soit B le point d'affixe $b = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}$.
   Placer dans le repère le point B et la médiatrice (Δ) du segment $[OA]$.

   b) Calculer sous forme algébrique l'affixe b' du point B' image du point B par f.
   Établir que B' appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
   Placer le point B' et tracer le cercle $(\mathscr{C})$ dans le repère.

   c) En utilisant la question 2, démontrer que, si un point M appartient à la médiatrice (Δ), son image M' par f appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   d) Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
   En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par f. (On laissera apparents les traits de construction.)

4. Dans cette question, on se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble (Γ) des points M distincts de A et de O dont l'image M' par f appartient à l'axe des abscisses.
   Les questions a) et b) peuvent être traitées de façon indépendante.

   a) On pose $z = x + \mathrm{i}\, y$ avec x et y réels tels que $(x, y) \neq (-1, 0)$ et $(x, y) \neq (0, 0)$.
   Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à :

$$\mathrm{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}.$$

   En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) et le tracer dans le repère.

   b) À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble (Γ).

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

On considère les deux courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente $(\mathscr{T})$ commune à ces deux courbes.

1. Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
   Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et par B le point d'abscisse b de la courbe $(\mathscr{C}_2)$.

   a) Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_{\mathrm{A}})$ à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ au point A.

   b) Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T}_{\mathrm{B}})$ à la courbe $(\mathscr{C}_2)$ au point B.

   c) En déduire que les droites $(\mathscr{T}_{\mathrm{A}})$ et $(\mathscr{T}_{\mathrm{B}})$ sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :
   $$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a\,e^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

   d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') :
   $$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4\,a\,e^a - 4\,e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation
   $$(E) : e^{2x} + 4\,x\,e^x - 4\,e^x - 4 = 0.$$

   Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :
   $$f(x) = e^{2x} + 4\,x\,e^x - 4\,e^x - 4.$$

   a) Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty\,;0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4\,e^x\,(x-1) < 0$.

   b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,,0[$.

   c) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$.

   d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,,+\infty[$.
   On note a cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites $(\mathscr{T}_{\mathrm{A}})$ et $(\mathscr{T}_{\mathrm{B}})$ sont confondues.

Exercice 4 (5 points)
Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par : $f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=f(u_n).$$

1. Étude de propriétés de la fonction f
   a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
   b) Résoudre dans l'intervalle $[0,+\infty[$ l'équation $f(x)=x$.
   On note α la solution.
   c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\ ,\ \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ,\ \alpha]$.
   De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\ ,+\infty[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\ ,+\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0=0$
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1}=f(u_n)=6-\frac{5}{u_n+1}.$$
   a) Sur le graphique représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y=x$ et $y=f(x)$.
   Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\,;0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le u_{n+1}\le\alpha$.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

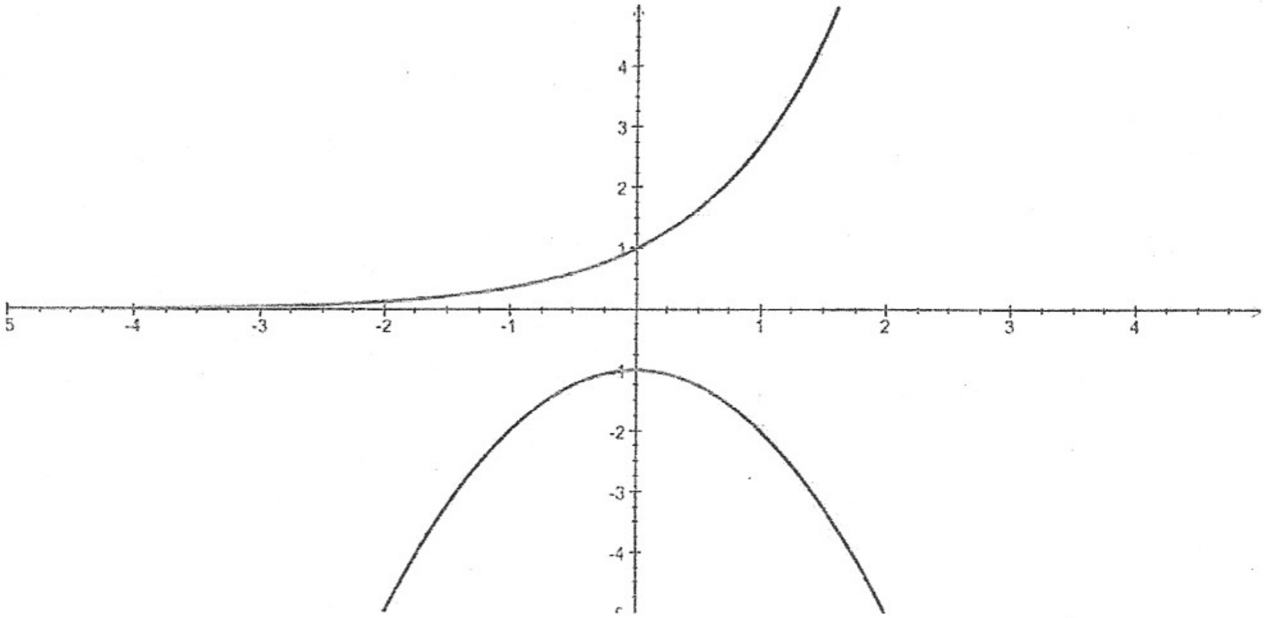
3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

   Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

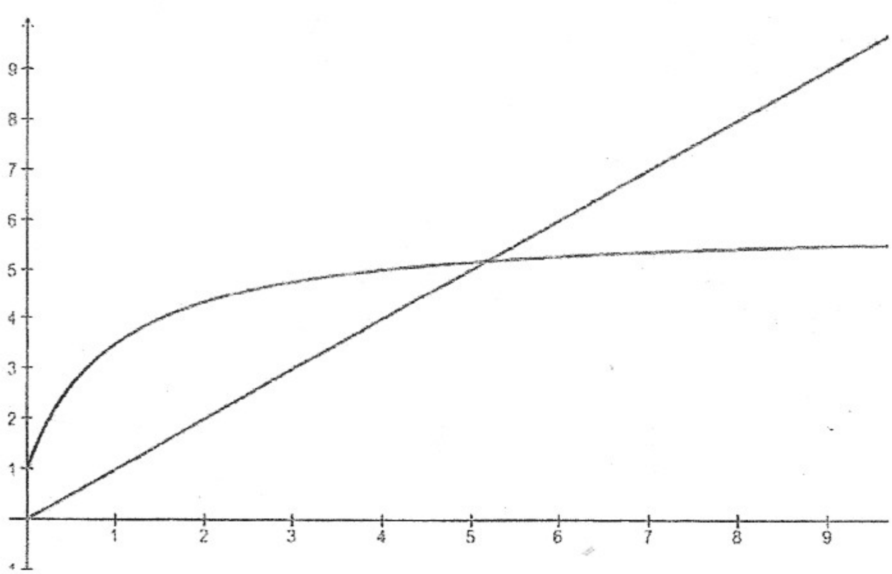
   Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Annexe 1 (Exercice 3, question 1)



Annexe 2 (Exercice 4, question 2.a))



Exercice 2 (5 points)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C, M, N et P d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i}\,,\quad b = -1 + 2\mathrm{i}\,,\quad c = 2 + 3\mathrm{i}\,,\quad m = 7 - 5\mathrm{i}\,,\quad n = 5 - \mathrm{i}\,,\quad p = 9 + \mathrm{i}\,.$$

1. a) Placer les points A, B, C, M, N et P dans le repère.

   b) Calculer les longueurs des côtés des triangles ABC et NMP.

   c) En déduire que ces deux triangles sont semblables.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de mettre en évidence deux similitudes qui transforment le triangle ABC en le triangle MNP.

2. Une similitude directe
   Soit s la similitude directe qui transforme le point A en N et le point B en P.
   a) Montrer qu'une écriture complexe de la similitude s est :
$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}\mathrm{i}\,.$$

   b) Déterminer le rapport, la valeur de l'angle arrondie au degré, ainsi que le centre de la similitude s.

   c) Vérifier que la similitude s transforme le point C en M.

3. Une similitude indirecte
   Soit s' la similitude dont l'écriture complexe est :
$$z' = 2\mathrm{i}\,\overline{z} + 3 - 3\mathrm{i}\,.$$

   a) Vérifier que : $\begin{cases} s'(A) = N \\ s'(B) = M\,. \\ s'(C) = P \end{cases}$

   b) Démontrer que s' admet un unique point invariant K d'affixe $k = 1 - \mathrm{i}$.

   c) Soit h l'homothétie de centre K et de rapport $\dfrac{1}{2}$ et J le point d'affixe 2.

   On pose : $f = s' \circ h$.
   Déterminer les images des points K et J par la transformation f.
   En déduire la nature précise de la transformation f.

   d) Démontrer que la similitude s' est la composée d'une homothétie et d'une réflexion.