ELEMENTS DE CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES (SERIE S)

Exercice 1 :

Partie A

1) u est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x :
$u'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x}$.
Donc pour tout réel x : $u'(x) + u(x) = e^{-x}$. u est donc bien solution de (E).

2) Les solutions de (E') sont de la forme : $y(x) = C\,e^{-x}$, où C est un réel fixé.

3) v est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x $v'(x) + v(x) = e^{-x}$, ce qui équivaut à :
pour tout réel x $v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)$, ce qui équivaut à :
pour tout réel x $(v - u)'(x) + (v - u)(x) = 0$, ce qui équivaut à :
v – u est solution de (E').

4) De ce qui précède, on déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :
$v(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$, où C est un réel fixé.

5) g est solution de (E) donc il existe un réel C tel que pour tout x : $g(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$.
Comme $g(0) = 2$, on en déduit que C = 2.

Partie B

1) Pour tout réel k la fonction f_k est dérivable sur IR comme produit de fonctions dérivables, et pour tout réel x : $f_k'(x) = (1 - (x + k))\,e^{-x}$.
Pour tout réel x : $e^{-x} > 0$, donc $f_k'(x)$ est du signe de $(1 - x - k)$ à savoir positif sur $]-\infty\,;\,1 - k]$, négatif sinon. Du lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction, on déduit que la fonction f_k admet un maximum pour $x = 1 - k$.

2) M_k est le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1 - k$ donc son ordonnée est $f_k(1 - k) = e^{k-1} = e^{-(1-k)}$. Il est donc bien sur Γ.

3) a) Par composition, la fonction représentée par Γ est décroissante, alors que f_k n'est pas monotone, les courbes sont donc faciles à identifier.

b) Γ passe par le point de coordonnées (0 ; 1). On en déduit que l'unité graphique en ordonnée est 2cm. Comme $f_k(0) = k$, on « lit » k =2.
$f_2(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$, donc la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point de coordonnées (-2 ; 0). On en déduit que l'unité graphique en abscisse est également 2cm.

Remarque : on retrouve, comme par hasard, la fonction g de la partie A !

4) En dérivant le polynôme, et intégrant l'exponentielle, on trouve :

$$I = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}\,dx = -4e^{-2} + 2 + \left[-e^{-x}\right]_0^2 = 3 - 5e^{-2}$$

La fonction f_k étant positive sur [0 ; 2], on a ainsi calculé l'aire (en unités d'aire) délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_k$ et les droites d'équations x = 0 et x = 2.

Exercice 2 :

1) Soient (u_n) et (v_n) des suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
De la première propriété, on déduit que (u_n) est majorée par v_0 et que (v_n) est minorée par u_0.
De la deuxième propriété, on déduit que les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers des réels U et V. Comme leur différence des deux suites converge vers 0, $U = V$.

2) a) Les deux suites sont adjacentes, car :
(u_n) est croissante (pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = 0,9 \times 10^{-n}$),
(v_n) décroissante, (pour tout entier n : $v_{n+1} - v_n = -0,9 \times 10^{-n}$),
pour tout entier n : $u_n \leq v_n$
$v_n - u_n = 2 \times 10^{-n}$ qui converge bien vers 0.
Ces suites ont donc la même limite qui est 1, par propriété des suites géométriques.

b) (u_n) et (v_n) ont pour limite $+\infty$. Elles ne peuvent de ce fait pas être adjacentes.

c) (u_n) et (v_n) ont pour limite 1 (par des propriétés usuelles sur les limites), mais elles ne sont pas adjacentes, la suite (v_n) n'étant pas monotone.

3) (u_n) est croissante, (v_n) décroissante (par des propriétés usuelles sur les variations de fonctions). La suite (u_n) converge vers 1.
Si $a = 0$, la suite (v_n) converge vers $-\infty$, sinon elle converge vers $\ln(a)$ (par des propriétés usuelles sur les limites).
Pour que les suites soient adjacentes, il faut que $a = \mathrm{e}$.
Réciproquement, lorsque $a = \mathrm{e}$, les suites vérifient bien la définition de suites adjacentes.

Exercice 3 :

1) $$\frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{40};$$

2) Comme la boule est remise après chaque tirage, les tirages sont indépendants. Il ne faut pas oublier que l'ordre de tirage n'est pas pris en compte. La probabilité demandée est donc :
$$\binom{5}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^2$$

3) Si on note N l'événement la boule tirée est noire, B l'événement la boule tirée est blanche, et U le nombre obtenu est 1, la probabilité demandée est :
$$P_U(B) = \frac{P(U \cap B)}{P(U)} = \frac{P(U \cap B)}{P_B(U) \times P(B) + P_N(U) \times P(N)} = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6}}{\frac{7}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{4}} = \frac{14}{23}.$$

4) $P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_1^3 = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$.

Exercice 4 : **(ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE)**

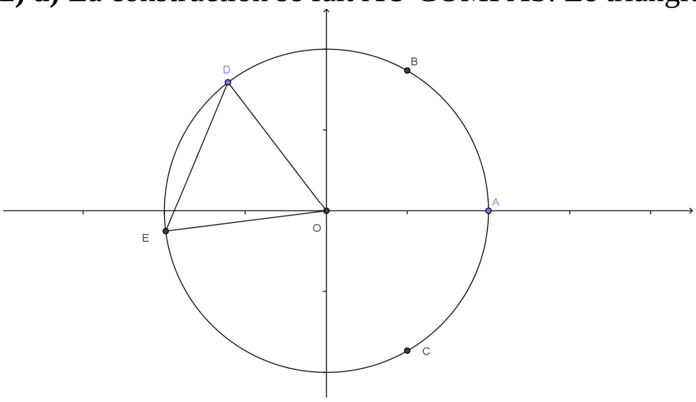
1) a) $\alpha^2-4\alpha=\left(1+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(1+i\sqrt{3}\right)=1-3-4+i\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)=-6-2\sqrt{3}i$

$2\overline{\alpha}-8=2\left(1-i\sqrt{3}\right)-8=-6-2\sqrt{3}i$

b) $|\alpha|=|\overline{\alpha}|=2$

Les points *B* et *C* sont donc sur le cercle de centre *O* et de rayon 2 (qui passe par *A*).

2) a) La construction se fait AU COMPAS. Le triangle *ODE* est équilatéral direct.



b) D'après l'expression complexe des rotations, on a :

$z_E=e^{i\frac{\pi}{3}}z_D$. Comme $\alpha=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, on en déduit $z_E=\alpha e^{i\theta}$.

3) a) $z_F=\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{\alpha+2e^{i\theta}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}$.

b) $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}}{2}-2}{\dfrac{\alpha}{2}+e^{i\theta}-2}=\dfrac{\alpha e^{i\theta}+\overline{\alpha}-4}{\alpha+2e^{i\theta}-4}$

Or d'après la question **1) a)** : $\alpha(\alpha-4)=2\left(\overline{\alpha}-4\right)$ d'où : $\dfrac{z_G-2}{z_F-2}=\dfrac{\dfrac{\alpha(\alpha-4)}{2}+\alpha e^{i\theta}}{\alpha+2e^{i\theta}-4}=\dfrac{\alpha\left(\alpha-4+2e^{i\theta}\right)}{2\left(\alpha-4+2e^{i\theta}\right)}=\dfrac{\alpha}{2}$.

$\dfrac{\alpha}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{|z_G-2|}{|z_F-2|}=1$ et $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AG}\right)=\arg\left(\dfrac{z_G-2}{z_F-2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ (à $2\pi-$près).

On en déduit que le triangle *AFG* est équilatéral.

4) *f*(-π) = *f*(π) = 7 ; $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=4-2\sqrt{3}$; $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=4+2\sqrt{3}$.

La fonction *f* admet un minimum pour $x=-\dfrac{\pi}{6}$, et ce minimum est positif. La conjecture est donc validée : *AF* est minimum pour $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

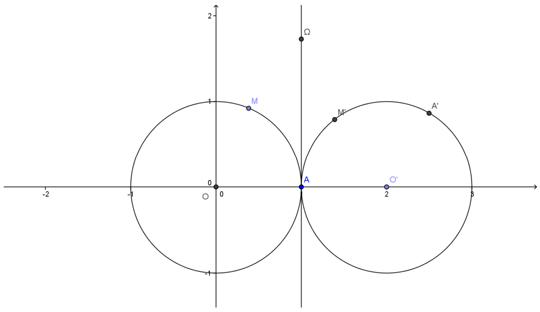
<u>Exercice 4 :</u> (ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE)

1) a) L'image de *A* a pour affixe 1, celle de Ω a pour affixe $1+i\sqrt{3}$.
On constate que les deux points sont invariants.

b) On reconnait l'expression complexe d'une similitude indirecte de rapport 1.
Du fait de l'invariance des points *A* et Ω on déduit qu'il s'agit de la réflexion d'axe $(A\Omega)$, c'est-à-dire la droite d'équation x = 1.

c) L'image d'un cercle par une similitude est un cercle de centre l'image du centre et de rayon le rayon multiplié par le rapport de la similitude (qui ici vaut 1).
L'image de *O* a pour affixe 2. L'image du cercle ($\mathscr{C}$) par *T* est donc le cercle de centre le point *O'* d'affixe 2 et de rayon 1.

2) a)



b) $\left|\frac{z'-2}{z}\right| = \frac{O'M'}{OM} = 1$ et $\arg\left(\frac{z'-2}{z}\right) = \left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On a donc : $\frac{z'-2}{z} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

c) On reconnait l'expression complexe d'une similitude directe, de rapport $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$, d'angle en radians $\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, et de centre d'affixe α tel que $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}\alpha + 2$, donc $\alpha = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, qui est l'affixe de Ω. La transformation *r* est la rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{3}$ radians.

3) <u>Remarque</u> : le point *M'* est défini précédemment pour des points *M* du cercle ($\mathscr{C}$). Il faut donc comprendre dans cette question que l'on définit les points M_1 également dans ce cas.

Avec des notations évidentes, on a : $z_{M_1} = \frac{z_M + z_{M'}}{2} = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} z_M + 1$.

On déduit de cette expression que M_1 est l'image de *M* par une similitude directe.
Ainsi, lorsque *M* décrit le cercle ($\mathscr{C}$), M_1 décrit également un cercle.

Comme $\left|z_{M_1} - 1\right| = \left|\frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right| \left|z_M\right|$, on en déduit que lorsque *M* décrit le cercle ($\mathscr{C}$), le point M_1 décrit le cercle de centre *A* et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$.