BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2011

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

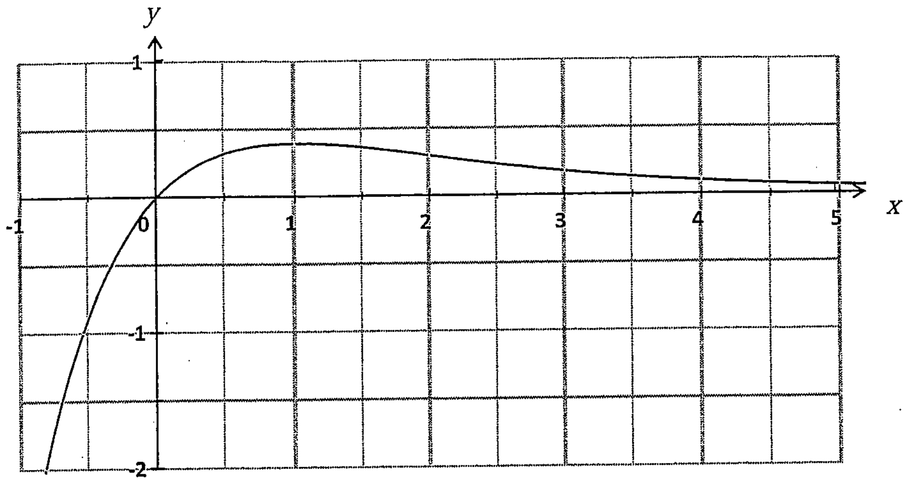
EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'exercice suivant est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) Pour chaque proposition choisir l'unique bonne réponse sachant qu'une bonne réponse rapporte un point et que l'absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$

La courbe représentative de f est tracée dans le repère ci-dessous :



1) Pour tout réel x, $f'(x)$ est égale à :

a) $-\,\mathrm{e}^{-x}$ b) e^{-x} c) $(1-x)\mathrm{e}^{-x}$

2) La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$

3) Une primitive F de f est définie sur $\mathbf{R}$ par :

a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ b) $F(x) = -(1+x)\,\mathrm{e}^{-x}$ c) $F(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}$

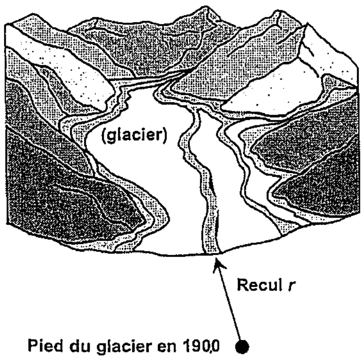
4) La valeur de $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ est :

a) Négative b) Inférieure à 1 c) Supérieure à 3

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats.

Le **glacier d'Aletsch**, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes, situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.



Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée **en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.**

Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900 (voir dessin ci-contre)

Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous.

On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure :	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t écoulée (depuis 1900) :	0	20	40	60	80	100
Recul r (en km) :	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Mesures déduites de : The Swiss Glaciers,
Yearbooks of the Glaciological Commission of the Swiss

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de $25{,}6 - 0{,}6 = 25$ km.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Partie A Étude d'un modèle affine

1) Tracer le nuage de points dans le repère donné en **annexe** (Durée t en abscisse, distance r en ordonnée).

2) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de r en fonction de t, puis tracer cette droite dans le repère précédent.

3) À partir du modèle affine obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a) Le recul puis la longueur du glacier en 2011.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

Partie B Utilisation d'un modèle exponentiel

Le résultat du **3.b)** de la partie A étant peu en accord avec la plupart des autres études, les glaciologues considèrent un autre modèle : le modèle exponentiel.

On pose $y = \ln(r)$. On rappelle que $\ln(r)$ désigne le logarithme népérien du recul r.

1) Recopier puis compléter le tableau suivant sur votre copie (pour permettre le calcul de y, la durée 0 de l'année 1900 a été exclue du tableau.

Durée t (à partir de 1900)	20	40	60	80	100
$y = \ln(r)$					

2) a) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de y en fonction de t.

b) Déduire que $r(t) = e^{0,025\,t - 1,599}$.

3) En utilisant le modèle obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a) Le recul puis la longueur du glacier en 2011.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

EXERCICE 3 (5 points)

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

On rappelle que si A et B sont deux événements d'un ensemble probabiliste, avec A de probabilité non nulle, la probabilité de B sachant A est le réel noté $P_A(B)$.

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.
En France les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4 % des hommes et 5 % des femmes sont asthmatiques.

Dans la population française, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

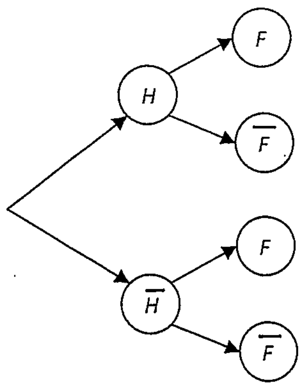
Partie A Étude de l'état d'asthme du couple

On note : H l'événement : « L'homme est asthmatique »,

et F l'événement : « La femme est asthmatique »

On admet que les événements H et F sont indépendants.

1) Recopier et compléter ~~de~~ l'arbre de probabilités ci-contre.



2) On note les événements :

A : « Aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »

B : « Un seul des deux adultes du couple est asthmatique »

C : « Les deux adultes du couple sont asthmatiques »

Montrer que : $P(A) = 0{,}912$; $P(B) = 0{,}086$; $P(C) = 0{,}002$.

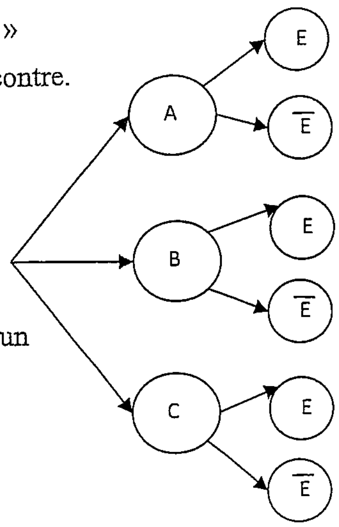
Partie B Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

- Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.
- Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.
- Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'événement : « Le premier enfant du couple est asthmatique »

1) Reproduire sur votre copie puis compléter l'arbre de probabilités ci-contre.



2) Montrer que $P(E) = 0{,}118$.

3) Calculer $P_E(A)$ et interpréter le résultat.

Déduire $P_E(\overline{A})$ et interpréter le résultat.

4) Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatiques ?

(Indication : on pourra chercher à calculer l'événement contraire)

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule : $P(x) = \dfrac{x+300}{x+100}$ pour $x \in [100\,;+\infty[$.

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus $P(300) = \dfrac{600}{400} = 1{,}5$ euros le kilogramme.

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1{,}5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A Etude du prix P proposé par le fournisseur

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$.

2) Montrer que $P'(x) = -\dfrac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100\,;+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction P.

Partie B Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).
Cette somme est donc égale à $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100\,;+\infty[$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.

2) Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$: $S'(x) = \dfrac{x^2+200x+30000}{(x+100)^2}$.

3) Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$: $S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \dfrac{1}{x+100}$.

4) En déduire une primitive T de S sur $[100\,;+\infty[$.

Partie C Étude de différentes situations

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1) Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits :

Préciser, au kilogramme près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.

2) On rappelle que la valeur moyenne M d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par la formule $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le supermarché estime acheter régulièrement entre 400 et 600 kilogrammes de fruits à ce fournisseur.
Déterminer la valeur moyenne de S sur [400 ; 600] et donner le résultat arrondi à l'unité.

ANNEXE

(à rendre avec la copie)

Exercice 2