BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8,
dont une page en annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.
On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal.
On suppose que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ et on note f' la fonction dérivée de f.
Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1\,;6]$.
On suppose que f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
f	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Pour chacune des huit affirmations ci-dessous, une seule de ces trois propositions convient :

VRAIE ou FAUSSE ou LES INFORMATIONS DONNÉES NE PERMETTENT PAS DE CONCLURE.

Recopier sur la copie le numéro de la question et la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 0,5 *point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.*

1. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

2. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe (C_f).

3. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$.

4. La fonction F est décroissante sur l'intervalle $]1\,;6]$.

5. $\ln[f(x)]$ existe pour tout x appartenant à $]-\infty\,;0[$.

6. Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.

- **a.** $g(6) = \mathrm{e}^3$.
- **b.** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = +\infty$
- **c.** $g'(3) \geqslant 0$.

Exercice 2 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

L'objet de l'exercice consiste à étudier les évolutions du nombre de mariages et du nombre de pacs (pacte civil de solidarité) signés entre partenaires de sexe opposé en France à partir de l'année 2000.

Partie A : étude du nombre de mariages

Le tableau suivant donne le nombre de mariages en France, en milliers, de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de mariages y_i en milliers	305	296	286	283	278	283	274	274	265

Source : INSEE

Pour i entier variant entre 0 et 8, on a représenté en **Annexe 1** dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i\,;\,y_i)$ associé à cette série.

1.
- **a.** Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
- **b.** Représenter D dans le repère de l'**Annexe 1**.

2. En utilisant cet ajustement affine, déterminer par la méthode de votre choix une estimation du nombre de mariages en France en 2012 (le résultat sera arrondi au millier).

Partie B : étude du nombre de pacs

Le tableau suivant donne le nombre de pacs signés entre partenaires de sexe opposé en France, en milliers, de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de pacs Y_i	16	15	21	26	33	53	64	96	138

Source : INSEE

1. Représenter dans le repère de l'**Annexe 1** le nuage points $N_i(x_i\,;\,Y_i)$ associé à cette nouvelle série statistique.

L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. Pour i entier variant entre 0 et 8 on pose $Z_i = \ln Y_i$.

2. Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant où Z_i est arrondi au centième :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Z_i	2,77								

3. Une équation de la droite d'ajustement affine de Z en x par la méthode des moindres carrés est $Z = 0{,}29x + 2{,}51$ (les coefficients étant arrondis au centième).
   a. En utilisant la relation $Z = \ln Y$, justifier la relation : $Y = 12{,}30\ \mathrm{e}^{0{,}29\,x}$
   b. En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de pacs signés en France entre personnes de sexe opposé en 2012 (arrondir au millier).

Partie C : Comparaison

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Si les évolutions du nombre de mariages et du nombre de pacs signés entre personnes de sexe opposé en France se poursuivent selon les modèles décrits dans les parties A et B, estimer à partir de quelle année le nombre de pacs dépassera celui des mariages.

Exercice 3 *(5 points)*

Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une session du baccalauréat se compose de deux parties :

- le premier groupe d'épreuves (encore appelé : « écrit » par abus de langage ou « premier tour ») ;
- le second groupe d'épreuves (encore appelé : « oral de rattrapage » ou « second tour »).
  Ce second groupe d'épreuves concerne les candidats n'ayant pas obtenu le bac à l'issue du premier groupe, mais ayant obtenu une moyenne générale supérieure ou égale à 08/20.

Les résultats au baccalauréat ES, en France métropolitaine et DOM, pour la session de juin 2010 à l'issue du *premier groupe d'épreuves* sont les suivants :

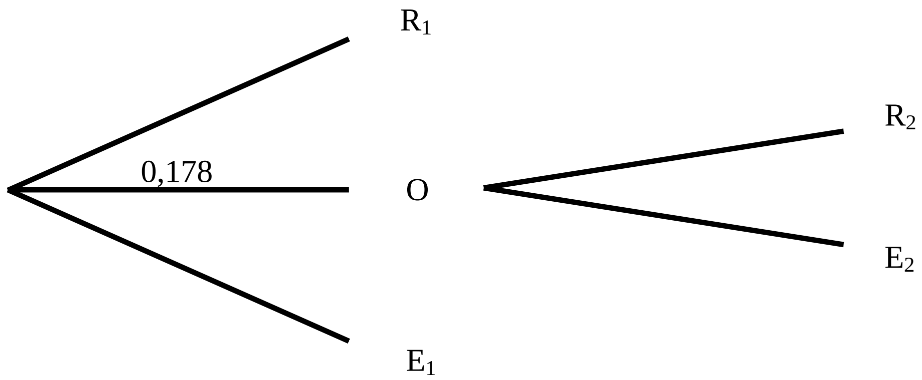
- 74,3 % des candidats ont été reçus à l'issue du premier tour (c'est-à-dire que leur moyenne générale m est telle que $m \geqslant 10$) ;
- 17,8 % des candidats sont allés aux oraux de rattrapage (c'est-à-dire que leur moyenne générale m est telle que $8 \leqslant m < 10$) ;
- les autres candidats ont été recalés (c'est-à-dire que leur moyenne générale m est telle que $m < 8$).

Le taux final de réussite au baccalauréat ES, en France métropolitaine et DOM, pour la session 2010 à l'issue des deux groupes d'épreuves est 86,1 %.

On interroge au hasard un candidat ayant passé le baccalauréat ES en 2010.
On note :

- R_1 l'événement : « le candidat interrogé a obtenu le baccalauréat à l'issue du premier tour » ;
- O l'événement : « le candidat interrogé est allé à l'oral de rattrapage » ;
- E_1 l'événement : « le candidat interrogé a été recalé à l'issue du premier tour » ;
- R_2 l'événement : « le candidat interrogé a obtenu le baccalauréat à l'issue de l'oral de rattrapage » ;
- E_2 l'événement : « le candidat interrogé a été recalé à l'issue de l'oral de rattrapage ».

On peut modéliser la situation par l'arbre (partiellement pondéré) ci-dessous, qu'on ne demande pas de compléter pour l'instant :



Si X est un événement, on note $p(\mathrm{X})$ sa probabilité.

Dans cet exercice les résultats demandés seront arrondis au millième.

1. Donner les valeurs des probabilités suivantes : $p(\mathrm{R}_1)$; $p(\mathrm{O})$ et $p(\mathrm{E}_1)$.

2. On appelle A l'événement : « le candidat interrogé a obtenu son baccalauréat » : on a donc $p(\mathrm{A}) = 0,861$.
   Montrer que $p(\mathrm{O} \cap \mathrm{R}_2) = 0,118$ et interpréter ce résultat.

3. Calculer $p_{\mathrm{O}}(\mathrm{R}_2)$, probabilité de l'événement R_2 sachant que l'événement O est réalisé. Interpréter ce résultat.

4. Recopier et compléter l'arbre partiellement pondéré, donné ci-dessus.

5. On interroge au hasard trois candidats ayant passé le baccalauréat ES en 2010 pour savoir s'ils l'ont obtenu. On suppose que le nombre de candidats à cette session est suffisamment grand pour considérer ces trois réponses comme indépendantes.
   a. Calculer la probabilité que les trois candidats aient été admis.
   b. Calculer la probabilité qu'au moins deux des candidats aient été admis.

Exercice n°4 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[11\ ;+\infty[$ par

$$f(x) = 17\,280\mathrm{e}^{-0,024x}$$

de sorte que $f(x)$ représente, en billions de barils (millions de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte au cours de l'année $2000 + x$.
On admet que la fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[11\ ;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.

1. Calculer l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2011 d'après ce modèle (on arrondira le résultat au billion près).

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[11\ ;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

4. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours d'une même année, 15 000 billions de barils de pétrole soient découverts ?
Si oui, déterminer, en justifiant, cette (ces) année(s).
Si non, justifier la réponse.

5. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours de chaque année à partir de 2011, au moins 6 000 billions de barils de pétrole soient découverts ?
Si oui, justifier la réponse.
Si non, déterminer, en justifiant, l'année pour laquelle les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6 000 billions de barils.

6.

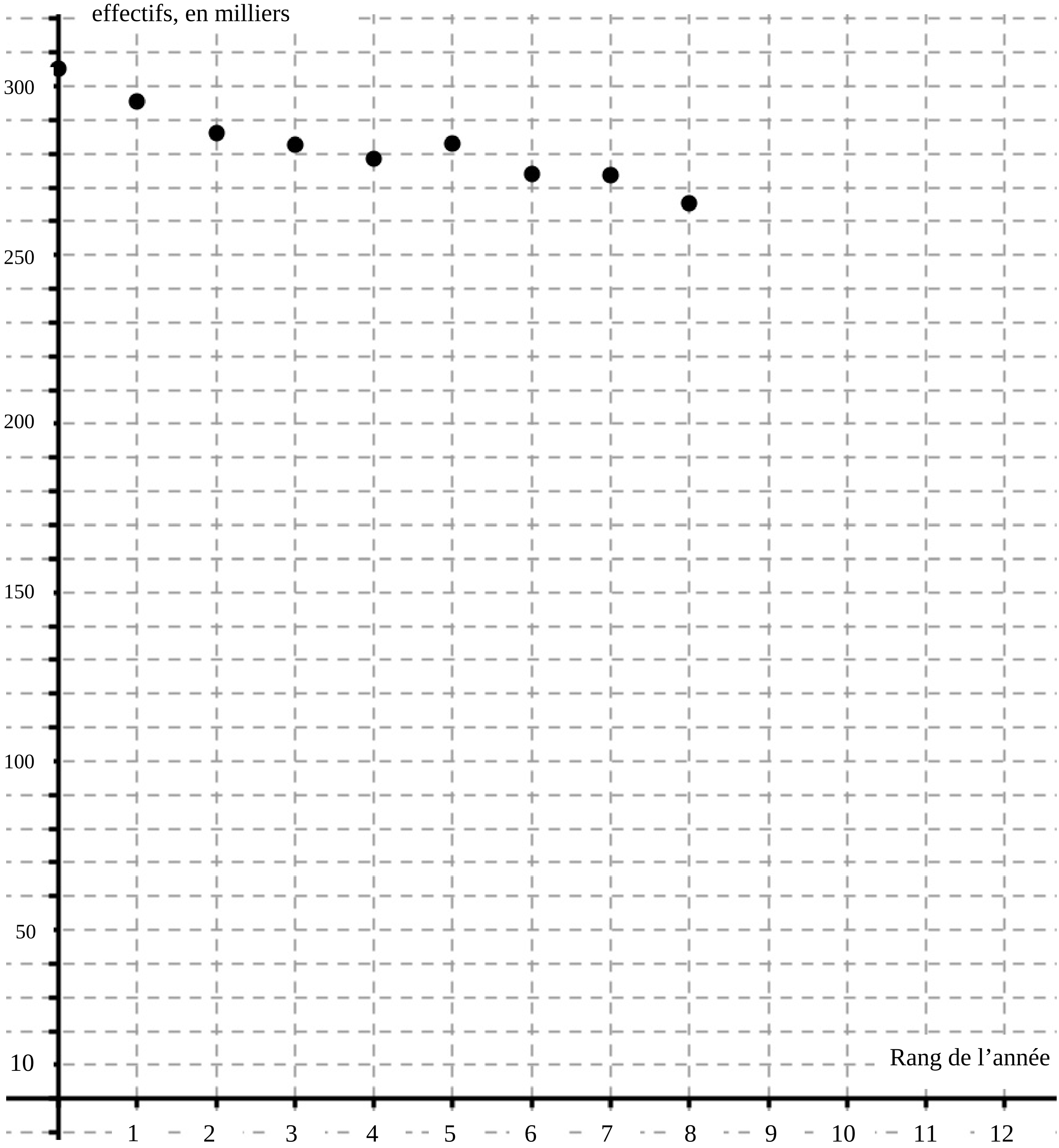
a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[11\ ;+\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte, puis donner la valeur arrondie à l'unité près, de l'intégrale I suivante :

$$I = \int_{11}^{21} f(x)dx\,.$$

c. En déduire le nombre moyen de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021.

ANNEXE 1
À RENDRE AVEC LA COPIE
EXERCICE 2 – commun à tous les candidats



Légende :

● série du nombre de mariages en fonction du rang de l'année