BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2011

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

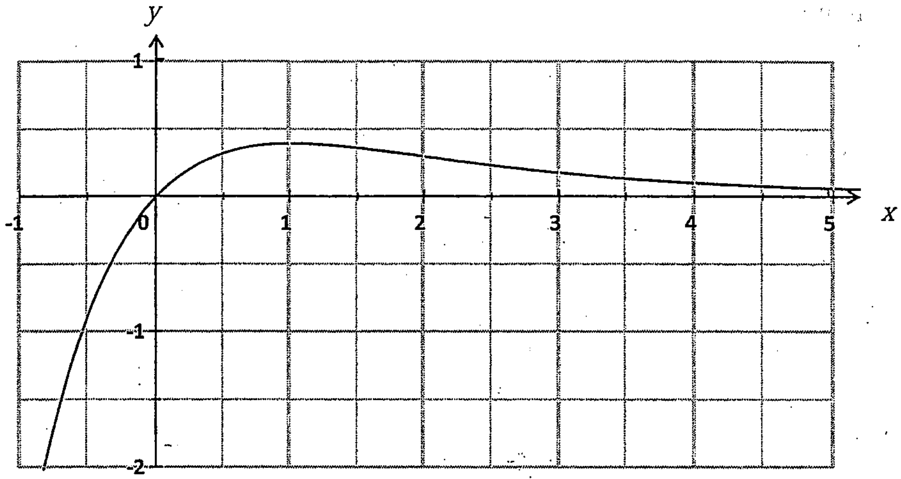
EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

L'exercice suivant est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples) Pour chaque proposition choisir l'unique bonne réponse sachant qu'une bonne réponse rapporte un point et que l'absence de réponse ou une réponse fausse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = x\,e^{-x}$

La courbe représentative de f est tracée dans le repère ci-dessous :



1) Pour tout réel x, $f'(x)$ est égale à :

a) $-e^{-x}$ **b)** e^{-x} **c)** $(1-x)e^{-x}$

2) La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$

3) Une primitive F de f est définie sur **R** par :

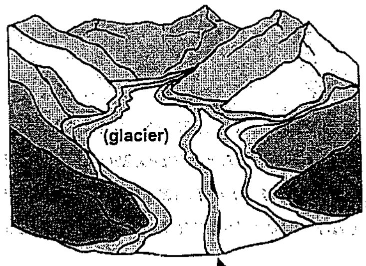
a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}$ **b)** $F(x) = -(1+x)e^{-x}$ **c)** $F(x) = -x\,e^{-x}$

4) La valeur de $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ est :

a) Négative. **b)** Inférieure à 1. **c)** Supérieure à 3.

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats.



Le **glacier d'Aletsch**, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes, situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.

Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée **en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.**

Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900 (voir dessin ci-contre)

Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous.

On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure :	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t écoulée (depuis 1900) :	0	20	40	60	80	100
Recul r (en km) :	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Mesures déduites de : The Swiss Glaciers,
Yearbooks of the Glaciological Commission of the Swiss

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de $25,6 - 0,6 = 25$ km.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Partie A Étude d'un modèle affine

1) Tracer le nuage de points dans le repère donné en **annexe** (Durée t en abscisse, distance r en ordonnée).

2) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de r en fonction de t, puis tracer cette droite dans le repère précédent.

3) À partir du modèle affine obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a) Le recul puis la longueur du glacier en 2011.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

Partie B Utilisation d'un modèle exponentiel

Le résultat du **3.b)** de la partie A étant peu en accord avec la plupart des autres études, les glaciologues considèrent un autre modèle : le modèle exponentiel.

On pose $y = \ln(r)$. On rappelle que $\ln(r)$ désigne le logarithme népérien du recul r.

1) Recopier puis compléter le tableau suivant sur votre copie (pour permettre le calcul de y, la durée 0 de l'année 1900 a été exclue du tableau.

Durée t (à partir de 1900)	20	40	60	80	100
$y = \ln(r)$					

2) a) À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de y en fonction de t.

b) Déduire que $r(t) = e^{0,025\,t - 1,599}$.

3) En utilisant le modèle obtenu précédemment, estimer par le calcul :

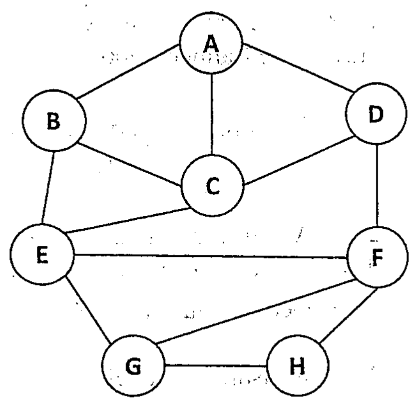
a) Le recul puis la longueur du glacier en 2011.

b) L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

EXERCICE 3 (5 points)

Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Etude d'un site



Un site internet comporte 8 pages, notées A, B, C, D, E, F, G, H reliées entre elles suivant le graphe ci-contre.
Ainsi, par exemple, à partir de la page A on peut directement accéder aux pages B, C et D.
Par contre, la page A ne permet pas d'accéder directement à la page F.

1) Le technicien souhaite tester les liens de pages. En partant de la page A, est-il possible de trouver un parcours passant une seule fois par tous les liens de pages ? Justifier la réponse.

2) Pour marquer les changements de page, l'administrateur du site souhaite que deux pages reliées aient des couleurs différentes.
On note N le nombre minimum de couleurs nécessaires.

a) Donner un sous-graphe complet d'ordre maximal.

b) En utilisant la question **2) a)** et à l'aide d'un algorithme, montrer que N = 3.

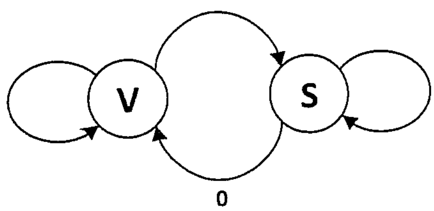
Partie B Etude de Propagation d'un virus d'un site à l'autre

Le site précédent, appelé site N°1, propose un unique lien vers un site partenaire, appelé Site N°2, sans retour possible. De même, le site N°2 propose un unique lien vers un site N°3, sans retour possible et ainsi de suite… (voir le schéma ci-dessous) :

Site N°1 → Site N°2 → Site N°3 → … → Site N°n → Site N°$n+1$ → …

Le site N°1 vient d'être infecté par un virus informatique qui utilise les liens entre les sites pour essayer de se propager, les autres sites n'étant pas encore touchés.
Face à ce nouveau virus, les antivirus ne sont efficaces qu'à 80 %.
On note : - V l'état « le site est infecté par le virus »
- S l'état « le site est sain (non infecté par le virus) »

On a dessiné ci-dessous le graphe probabiliste traduisant les risques de <u>propagation du virus d'un site au suivant</u> :



1) Justifier la valeur 0 indiquée sur le graphe probabiliste précédent, puis recopier et compléter ce graphe sur votre copie.

2) Préciser la matrice de transition M de ce graphe (première ligne pour V ; deuxième ligne pour S)
Pour tout entier naturel non nul n, on note :
On note P_n la probabilité que le n-ième site soit infecté, Q_n la probabilité que le n-ième site soit sain et $X_n = (P_n \quad Q_n)$.
On a donc $X_1 = (\ 1 \quad 0\ )$ (traduisant que le site N°1 est infecté) et $X_{n+1} = X_n\, M$

3) a) En utilisant la relation $X_{n+1} = X_n M$ montrer que $P_{n+1} = 0{,}2\, P_n$

b) En déduire P_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (P_n) lorsque n tend vers plus l'infini.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.
Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule : $P(x) = \dfrac{x+300}{x+100}$ pour $x \in [100\,;+\infty[$.

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus $P(300) = \dfrac{600}{400} = 1,5$ euros le kilogramme.

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1,5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

Partie A Etude du prix P proposé par le fournisseur

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$.

2) Montrer que $P'(x) = -\dfrac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100\,;+\infty[$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction P.

Partie B Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).
Cette somme est donc égale à $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100\,;+\infty[$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.

2) Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$: $S'(x) = \dfrac{x^2+200x+30000}{(x+100)^2}$.

3) Montrer que pour tout x appartenant à $[100\,;+\infty[$: $S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \dfrac{1}{x+100}$.

4) En déduire une primitive T de S sur $[100\,;+\infty[$.

Partie C Étude de différentes situations

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1) Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits :

Préciser, au kilogramme près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.

2) On rappelle que la valeur moyenne M d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par la formule $M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Le supermarché estime acheter régulièrement entre 400 et 600 kilogrammes de fruits à ce fournisseur.
Déterminer la valeur moyenne de S sur [400 ; 600] et donner le résultat arrondi à l'unité.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)

Exercice 2