BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2011

MATHÉMATIQUES

- Série ES -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte une annexe.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice constitue un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, indiquer sur votre copie le numéro de la question et la seule réponse exacte.
Barème : Une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.

1) On considère la fonction f définie par $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

a) L'ensemble de définition de la fonction f est :

$]0;+\infty[$ $\qquad$ $[-1;1]$ $\qquad$ $]-1;1[$ $\qquad$ $]1;+\infty[$

b) Le point de C_f d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ a pour ordonnée :

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\ln 1-\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $\ln 3-2\ln 2$ $\qquad$ $-0{,}2876820725$

2) On considère à présent la fonction g définie sur $]1;+\infty[$ par $g(x)=\ln(\ln x)$.

a) Sur $]1;+\infty[$, l'inéquation $g(x)>0$ admet comme ensemble de solutions :

$]1;\mathrm{e}[$ $\qquad$ $]1;+\infty[$ $\qquad$ $]\mathrm{e};+\infty[$ $\qquad$ $[\mathrm{e};+\infty[$

b) Sur $]1;+\infty[$, l'expression de la dérivée de la fonction g est égale à :

$\dfrac{1}{\ln x}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ x $\qquad$ $\dfrac{1}{x\ln x}$

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

On rappelle que :

- Le taux d'emploi d'une classe d'individus est calculé en rapportant le nombre d'individus de la classe ayant un emploi au nombre total d'individus dans la classe.
- Un individu âgé de 55 ans à 64 ans est appelé un « senior ».
- UE désigne l'Union européenne.

Selon un rapport de l'INSEE :
« Le taux d'emploi des personnes âgées de 55 à 64 ans est considéré comme un levier privilégié pour limiter l'exclusion de ces personnes du marché du travail et maîtriser les dépenses de retraites. En 2008, il est de 45,6 % dans l'UE, mais seulement de 38,3 % en France alors que l'objectif de l'UE comme de la France est d'atteindre 50 % en 2010. »

Le but de l'exercice est de vérifier si la France a atteint l'objectif visé par l'UE.

Dans tout l'exercice, le taux d'emploi sera exprimé en pourcentage. Les valeurs approchées seront arrondies au dixième.

Partie A Etude statistique et interpolation de données

Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors en France entre 1992 et 1998 :

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Taux d'emploi des seniors en % y_i	29,8	29,7	29,6	29,6	29,4	29	28,3

Source : INSEE, Eurostat

1) Déterminer, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

2) Selon cet ajustement, déterminer le taux d'emploi des seniors en 1999.

3) Selon cet ajustement, déterminer si la France a atteint l'objectif fixé en 2010.

Partie B Interpolation de données à l'aide d'un second modèle

Le taux d'emploi des séniors en France est en réalité de 28,8 % en 1999 et on admet qu'à partir de l'année $2000+n$, il est donné par l'expression $29{,}9\times1{,}037^n$ où n désigne un entier naturel. Selon ce modèle, déterminer :

1) Le taux d'emploi des seniors en 2010.

2) À partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

Partie C Extrapolation de données selon un troisième modèle.

Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors en France entre 2001 et 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Taux d'emploi des seniors en % y_i	31,9	34,7	37	37,8	38,5	38,1	38,2	38,2	38,9

Source : INSEE, Eurostat

Désormais, à partir de 2001, on choisit un modèle logarithmique et on admettra qu'à partir de 2001, le taux d'emploi des seniors est donné par la fonction f définie sur $[9;+\infty[$ par $f(x)=a\ln(x+1)+b$ où a et b désignent deux nombres réels.

1) En considérant les années 2001 et 2006, écrire le système d'équations que doivent vérifier a et b .

2) En déduire que $a=\dfrac{6{,}2}{\ln 1{,}5}$.

Dans la suite, on admettra que $a=15{,}3$ et $b=-3{,}3$.

3) Selon ce modèle, déterminer à partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f , g et h définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=-x+1$ et $h(x)=f(x)-g(x)$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A Position relative de C_f et de l'une de ses tangentes.

1) Vérifier, par le calcul, que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est la droite Δ.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x)=1-e^{-x}$.

b) Etudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbf{R}$.

3) En utilisant les questions **1)** et **2)**, étudier la position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B Calcul d'aire

1) Montrer que $\int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{e}$.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit a un nombre réel vérifiant $a>1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en **annexe**. On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D.

a) Déterminer en fonction de a la valeur de $\mathcal{A}$.

b) Déterminer la limite de $\mathcal{A}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

En 2010, les clients d'une banque nationale se répartissent en deux catégories distinctes :

- Catégorie A, composée des clients d'agence
- Catégorie I, composée des clients internet

En 2010, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.
On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.
On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année $2010 + n$,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année $2010 + n$
- $P_n = (a_n \quad i_n)$, la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

Partie A Etat stable d'un graphe probabiliste

Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième

1) Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.

2) Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.

On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.

3) a) Calculer la matrice P_1.

b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la répartition des clients de la banque en 2015.

4) Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.
Interpréter le résultat.

Partie B Etude de la limite d'une suite récurrente

1) a) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}94a_n + 0{,}01$.

2) On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \frac{1}{6}$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{113}{150} \times 0{,}94^n + \frac{1}{6}$.

d) Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

ANNEXE

EXERCICE 3