

**BACCALAUREAT GENERAL**

**MATHEMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement Obligatoire**

*Durée de l'épreuve : 4 heures*

*Coefficient : 7*

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

## EXERCICE 1 (5 points )

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle  $J$  le point d'affixe  $i$ .

1. On considère les points  $A, B, C, H$  d'affixes respectives  $a = -3 - i, b = -2 + 4i, c = 3 - i$  et  $h = -2$ .  
Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que  $J$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $ABC$ . Préciser le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ .
3. Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe  $\frac{b-c}{h-a}$ .  
En déduire que les droites  $(AH)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

Dans la suite de l'exercice, on admet que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ , c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle  $ABC$ .

4. On note  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . Déterminer l'affixe  $g$  du point  $G$ .  
Placer  $G$  sur la figure.
5. Montrer que le centre de gravité  $G$ , le centre du cercle circonscrit  $J$  et l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$  sont alignés. Le vérifier sur la figure.
6. On note  $A'$  le milieu de  $[BC]$  et  $K$  celui de  $[AH]$ . Le point  $A'$  a pour affixe  $a' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ .
  - a. Déterminer l'affixe du point  $K$ .
  - b. Démontrer que le quadrilatère  $KHA'J$  est un parallélogramme.

## EXERCICE 2 (6 points )

(Commun à tous les candidats)

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^x - 1.$$

- a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et étudier le sens de variation de  $f$ .
- b. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
- c. Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

2. On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction exponentielle et  $\Gamma$  celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  sont données en annexe.

Soit  $x$  un nombre réel strictement positif. On note  $M$  le point de  $\mathcal{C}$  d'abscisse  $x$  et  $N$  le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $x$ .

On rappelle que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $e^x > \ln(x)$ .

- a. Montrer que la longueur  $MN$  est minimale lorsque  $x = \alpha$ . Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à  $10^{-2}$  près.
  - b. En utilisant la question 1., montrer que  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ . En déduire que la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $\alpha$  et la tangente à  $\Gamma$  au point d'abscisse  $\alpha$  sont parallèles.
3. a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x \ln(x) - x$ . Montrer que la fonction  $h$  est une primitive de la fonction logarithme népérien sur  $]0, +\infty[$ .
- b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe 1**.

### EXERCICE 3 (4 points )

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue  $n$  tirs supposés indépendants. On désigne par  $p_n$  la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces  $n$  tirs.

La valeur minimale de  $n$  pour que  $p_n$  soit supérieure ou égale à 0,9 est :

- a. 6      b. 7      c. 10      d. 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire  $X$  définie sur  $[0, +\infty[$  et suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,0002$ . Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant  $t$  est  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

- a. 0,271      b. 0,135      c. 0,865      d. 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1. Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

- a.  $\frac{125}{3\,888}$       b.  $\frac{625}{648}$       c.  $\frac{25}{7\,776}$       d.  $\frac{3}{5}$

4. Soient  $A$  et  $B$  deux événements indépendants d'un même univers  $\Omega$  tels que  $p(A) = 0,3$  et  $p(A \cup B) = 0,65$ . La probabilité de l'événement  $B$  est :

- a. 0,5      b. 0,35      c. 0,46      d. 0,7

## EXERCICE 4 (5 points )

(Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la droite  $D$  passant par le point  $A$  de coordonnées  $(3; -4; 1)$  et dont un vecteur directeur est  $\vec{u}(1; -3; 1)$ .

On considère la droite  $D'$  dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On admet qu'il existe une unique droite  $\Delta$  perpendiculaire aux droites  $D$  et  $D'$ . On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite  $\Delta$  et de calculer la distance entre les droites  $D$  et  $D'$ , distance qui sera définie à la question 5.

On note  $H$  le point d'intersection des droites  $D$  et  $\Delta$ ,  $H'$  le point d'intersection des droites  $D'$  et  $\Delta$ . On appelle  $P$  le plan contenant la droite  $D$  et la droite  $\Delta$ . On admet que le plan  $P$  et la droite  $D'$  sont sécants en  $H'$ . Une figure est donnée en **annexe 2**.

1. On considère le vecteur  $\vec{w}$  de coordonnées  $(1; 0; -1)$ . Démontrer que  $\vec{w}$  est un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .
2. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(3; 2; 3)$ .
  - a. Démontrer que le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan  $P$ .
  - b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $P$  est  $3x + 2y + 3z - 4 = 0$ .
3.
  - a. Démontrer que le point  $H'$  a pour coordonnées  $(-1; 2; 1)$ .
  - b. En déduire une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ .
4.
  - a. Déterminer les coordonnées du point  $H$ .
  - b. Calculer la longueur  $HH'$ .
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

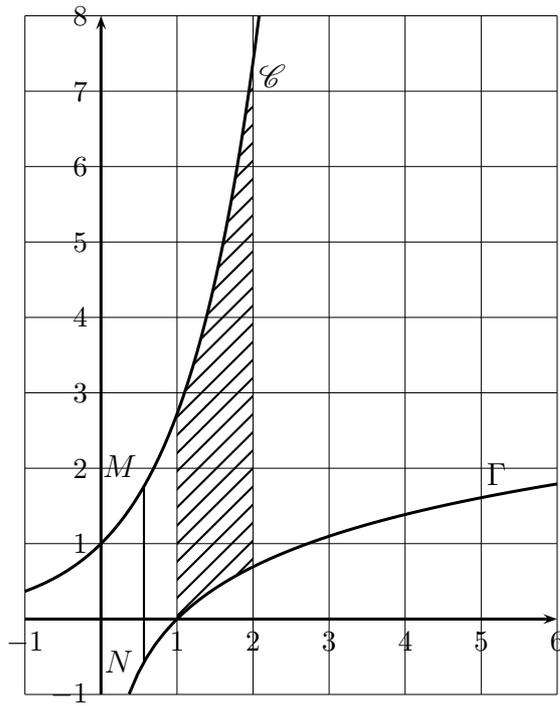
L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point  $M$  appartenant à  $D$  et tout point  $M'$  appartenant à  $D'$ ,  $MM' \geq HH'$ .

  - a. Montrer que  $\overrightarrow{MM'}$  peut s'écrire comme la somme de  $\overrightarrow{HH'}$  et d'un vecteur orthogonal à  $\overrightarrow{HH'}$ .
  - b. En déduire que  $\|\overrightarrow{MM'}\|^2 \geq \|\overrightarrow{HH'}\|^2$  et conclure.

La longueur  $HH'$  réalise donc le minimum des distances entre un point de  $D$  et un point de  $D'$ . On l'appelle distance entre les droites  $D$  et  $D'$ .

**FEUILLE ANNEXE**

**Annexe 1, exercice 2**



**Annexe 2, exercice 4**  
**Commun à tous les candidats**

