BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. **Étude d'une fonction f.** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

c. En déduire les variations de la fonction f.

2. **Étude d'une fonction g.** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

a. Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.
Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

b. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. **a.** Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

c. Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$.

4. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

En exprimant l'aire $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire $\mathscr{A}$.

EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5i$ et $c = 4$ ainsi que les carrés $ABIJ$, $AKLC$ et $BCMN$, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.
La figure est donnée en **annexe 2.**

1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En déduire que le point J a pour affixe $-7 + 2i$.
On admettra que l'affixe du point K est $-2 - 6i$.

2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments $[BK]$ et $[JC]$ ont la même longueur. Calculer cette longueur.

3. **a.** Calculer les affixes des points S et T.

b. Déterminer l'affixe du point U.

c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.

4. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right)$.

5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v = -0,752 + 0,864i$.

a. Établir que les points A, V et U sont alignés.

b. Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{BVC}$?

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arêtes de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $\left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$. Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$$A(1;0;0)\ B(1;1;0)\ C(0;1;0)\ D(0;0;0)\ E(1;0;1)\ F(1;1;1)\ G(0;1;1)\ H(0;0;1)$$

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

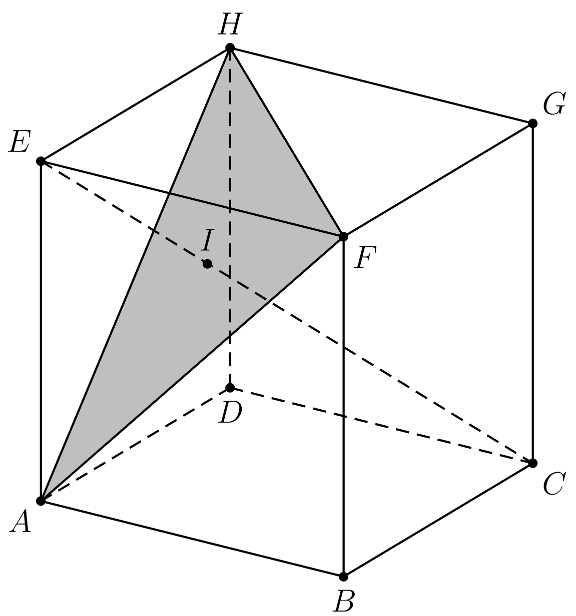
e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF). Que représente le point I pour le triangle AFH ?

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :

- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre $EAFH$.



EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Restitution organisée de connaissances.

Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier. Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives :

$$\Gamma : z = xy \text{ et } C : x^2 + z^2 = 1.$$

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C

a. Démontrer que les coordonnées $(x; y; z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que :

$$x^2\left(1 + y^2\right) = 1.$$

b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n \geqslant 2$.

b. Vérifier que : $\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right) = n^4 + 4$.

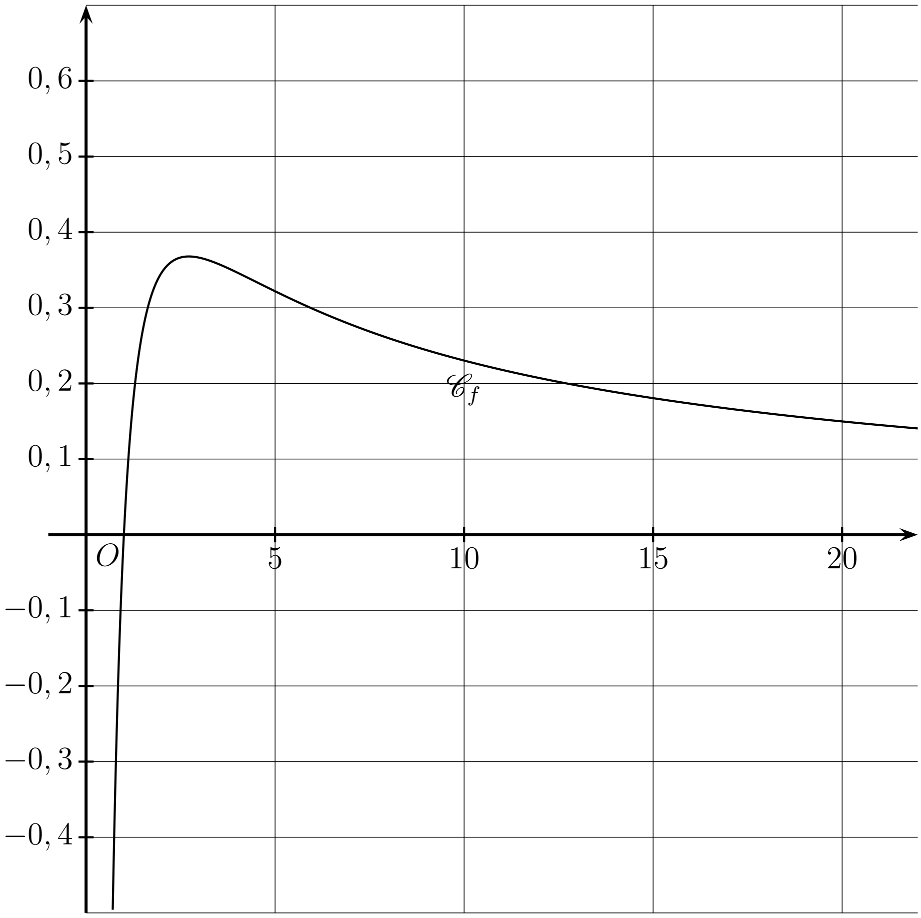
c. Démontrer que, quelque soit le nombre entier naturel $n \geqslant 2$, $n^4 + 4$ n'est pas premier.

d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

FEUILLES ANNEXES

Annexe 1, exercice 1



Annexe 2, exercice 2
Commun à tous les candidats