BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les trois points :

A (1, 2, –1), B (–3, –2, 3) et C (0, –2, –3).

1. a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2,-1,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Soit (*P*) le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$.

   Démontrer que les plans (ABC) et (*P*) sont perpendiculaires.

3. On appelle G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$.

   a) Démontrer que le point G a pour coordonnées (2, 0, –5).

   b) Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (*P*).

   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

   d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (*P*) avec la droite (CG).

4. Démontrer que l'ensemble (*S*) des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (*P*) et de la sphère (*S*).

Exercice 2 (3 points)

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc. D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70% des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche. On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

   a) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

   Réponse A : $\frac{3}{5}$ **Réponse B** : $\frac{4}{5}$ **Réponse C** : $\frac{3}{50}$ **Réponse D** : $\frac{6}{25}$

   b) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

   Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse B** : $\frac{33}{50}$ **Réponse C** : $\frac{3}{5}$ **Réponse D** : $\frac{12}{25}$

   c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

   Réponse A : $\frac{4}{11}$ **Réponse B** : $\frac{6}{25}$ **Réponse C** : $\frac{7}{11}$ **Réponse D** : $\frac{33}{50}$

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.
   Les boules sont indiscernables au toucher.
   L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

   a) La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

   Réponse A : $\frac{11}{81}$ **Réponse B** : $\frac{2}{7}$ **Réponse C** : $\frac{5}{84}$ **Réponse D** : $\frac{4}{63}$

   b) La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

   Réponse A : $\frac{2}{7}$ **Réponse B** : $\frac{1}{7}$ **Réponse C** : $\frac{1}{21}$ **Réponse D** : $\frac{79}{84}$

   c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
   Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'événement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

   Réponse A : 76 **Réponse B** : 71 **Réponse C** : 95 **Réponse D** : 94

Exercice 3 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

Prérequis : L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$ alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.

On note D le symétrique de A par rapport au point C.

On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On appelle Ω le centre de la similitude s.
   a) En utilisant la relation $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}$, démontrer que $\mathrm{DC}^2 = \Omega\mathrm{D}^2$.
   b) En déduire la nature du triangle $\Omega\mathrm{DC}$.
3. On pose $\sigma = s \circ s$.
   a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer l'image du point D par la transformation σ.
4. Démontrer que le quadrilatère $\mathrm{AD}\Omega\mathrm{B}$ est un rectangle.
5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{A}; \vec{u}, \vec{v}\right)$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et 2i.
   a) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1+\mathrm{i})z + 2 - \mathrm{i}$
   où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s.
   b) On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Démontrer que $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$
   c) Soit J le point d'affixe $1 + 3\mathrm{i}$.
   Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$u_1=0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1}=f(u_n)=u_n+\mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x)\leqslant x$.
   On pourra étudier la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=x-\ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1)\leqslant \ln(n)+\dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(\ln(n))=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n)\leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
$u_n\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$.

6. a) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k}\leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n\leqslant 1+\ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n)\leqslant u_n\leqslant 1+\ln(n-1)$.
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.