EXERCICE 1 (4 points)

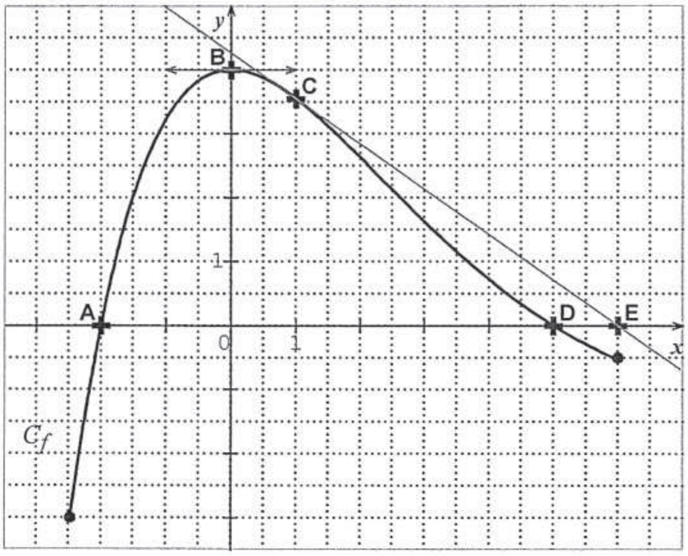
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Pour chaque question, indiquer par a), b) ou c) l'unique bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{2}\ ;\ 6\right]$.

La courbe C_f tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Le point A a pour coordonnées $(-2\ ;\ 0)$, le point B a pour coordonnées $(0\ ;\ 4)$, le point C a pour coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{7}{2}\right)$, le point D a pour coordonnées $(5\ ;\ 0)$ et le point E a pour coordonnées $(6\ ;\ 0)$.

On précise que la droite (CE) est tangente à la courbe C_f au point C et que la courbe C_f admet au point B une tangente horizontale.



On note g et h les fonctions définies respectivement par $g(x) = \ln[f(x)]$ et $h(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.

1) La fonction g est définie sur l'intervalle :

a) $]-2\ ;\ 5[$ **b)** $[-2\ ;\ 5]$ **c)** $\left[-\frac{5}{2}\ ;\ 6\right]$

2) Le nombre $g(1)$ est égal à :

a) $\frac{\ln 7}{\ln 2}$ **b)** $\ln 7 - \ln 2$ **c)** $\frac{7}{2}$

3) On note f' la fonction dérivée de f, le nombre $f'(1)$ est égal à :

a) 3,5 **b)** $-\frac{10}{7}$ **c)** $-0,7$

4) On note h' la fonction dérivée de h. Le nombre $h'(0)$ est égal à :

a) e^0 **b)** 0 **c)** e^4

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la proportion de bacheliers ayant obtenu une mention au baccalauréat, série ES, entre 2002 et 2009.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Proportion y_i en %	25,5	28,6	30	33,1	36,8	41	41,1	44,1

Source : ministère de l'Education Nationale et ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

1) Calculer le taux d'évolution de la proportion de bacheliers ayant obtenu une mention au baccalauréat ES entre 2002 et 2009. On exprimera le résultat sous forme d'un pourcentage arrondi à l'unité.

2) Dans cette question, on envisage un ajustement affine et on admet qu'une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, est $y = 2{,}73x + 25{,}47$ (les coefficients étant arrondis à 0,01 près).
En supposant que ce modèle reste valable pour les années suivantes :

a) Estimer la proportion de bacheliers susceptibles d'obtenir une mention au baccalauréat ES en 2012.

b) Estimer l'année à partir de laquelle la proportion de bacheliers susceptibles d'obtenir une mention au baccalauréat ES dépassera 60 %.

3) Dans cette question, on envisage un ajustement exponentiel et on pose $z = \ln y$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$								

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 0,01 près.

c) En déduire que $y = A \times B^x$ où A et B sont deux nombres réels à déterminer. On arrondira à 0,01 près.

d) En supposant que ce modèle reste valable pour les années suivantes, calculer la proportion, arrondie à 0,1 %, de bacheliers susceptibles d'obtenir une mention au baccalauréat ES en 2012.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Au rugby, réussir une transformation consiste à faire passer le ballon entre deux poteaux verticaux et au dessus de la barre horizontale reliant ces deux poteaux.

Basile est un joueur de rugby, il envisage de devenir professionnel.
Ses différentes expériences en championnat conduisent aux résultats suivants :

- Lors d'un match, la probabilité que Basile réussisse la première transformation est égale à 0,5,
- Si Basile réussit une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,8,
- Si Basile ne réussit pas une transformation, la probabilité qu'il réussisse la transformation suivante est égale à 0,6.

Basile se prépare pour son match de sélection en tant que professionnel.
On considère que lors du match, n transformations sont tentées avec n entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note T l'état : « Basile réussit sa transformation ».

Pour $n \geqslant 1$, on note :

- p_n la probabilité que Basile réussisse la n-ième transformation,
- q_n la probabilité que Basile ne réussisse pas la n-ième transformation,
- $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors de la n-ième transformation.

On a : $\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Partie A

1) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets T et $\overline{\mathrm{T}}$.

2) Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

3) Déterminer l'état probabiliste P_2.

Partie B

1) a) En utilisant l'égalité $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{P}_n \times \mathrm{M}$, montrer que $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,6q_n$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$.

2) Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = p_n - 0,75$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

b) En déduire que la suite (p_n) converge et donner sa limite.

c) Interpréter le résultat précédent.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (ax + b)\ e^{-x}$ où a et b sont deux nombres réels.
On note f' la fonction dérivée de f.

1) Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = (a - b - ax)\ e^{-x}$.

2) On donne $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$. En déduire a et b.

Partie B

Dans cette partie, on admettra que $a = 4$ et $b = 1$. Donc pour tout réel x, $f(x) = (4x + 1)\ e^{-x}$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra utiliser le fait que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{4x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$).

3) Etudier le sens de variation de f sur **R**.

Partie C

Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine.
Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par la fonction f étudiée dans la **partie B**.

1) Quel est le coût de production maximal hebdomadaire ? On arrondira le résultat à l'euro près.

2) Démontrer que la fonction F définie sur $[0\ ;\ 5]$ par $F(x) = (-4x - 5)\ e^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur ce même intervalle.

3) a) Calculer $\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

b) Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?