

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2012

MATHÉMATIQUES

Série ES

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

La feuille annexe de l'exercice 2 (page 6) est à rendre avec la copie.

Une feuille de papier millimétré est mise à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante.

La fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = e^x - x + 1$. On admet qu'elle est dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. L'image de $\ln 2$ par la fonction f est :
 - $\frac{1}{2} + \ln 2$
 - $-1 + \ln 2$
 - $3 - \ln 2$
 - $1 - 2 \ln 2$
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe Γ au point d'abscisse 1 est :
 - $e - 1$
 - e
 - $1 - e$
 - 0
3. La limite de la fonction f en $-\infty$ est :
 - $-\infty$
 - 0
 - $+\infty$
 - 1
4. Une primitive sur l'ensemble des nombres réels de la fonction f est la fonction F définie sur l'ensemble des nombres réels par :
 - $F(x) = e^x - 1$
 - $F(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x$
 - $F(x) = e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x$
 - $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$
5. L'inéquation $f(x) \leq 1$ admet sur l'ensemble des nombres réels :
 - Aucune solution
 - Une solution
 - Deux solutions
 - Une infinité de solutions

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour jouer sur internet à un certain jeu la souscription d'un abonnement annuel est obligatoire.

A partir d'un sondage, on prévoit que :

- 80 % des abonnés renouvellent chaque année leur abonnement,
- le nombre de nouveaux abonnés sera de 20 000 tous les ans.

1. Au premier janvier 2012, on comptait 50 000 abonnés à ce jeu en ligne.

Selon ce modèle, justifier qu'au premier janvier 2013 le nombre d'abonnés sera égal à 60 000.

2. (a) Justifier que le nombre d'abonnés au premier janvier de l'année 2012 + n est modélisé par la suite (a_n) définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 50\,000 \\ \text{pour tout entier naturel } n, a_{n+1} = 0,8 a_n + 20\,000 \end{cases}$$

(b) Calculer a_2 et a_3 .

(c) Sur le graphique situé en annexe, **à rendre avec la copie**, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormal les droites D d'équation $y = x$ et Δ d'équation $y = 0,8x + 20\,000$. Sur l'axe des abscisses, représenter a_0 puis construire a_1, a_2, a_3, a_4 en utilisant les représentations graphiques des deux droites précédentes.

Laisser apparents les traits de construction.

(d) En s'appuyant sur une observation graphique, émettre une conjecture sur la limite de la suite (a_n) .

3. On admet que pour tout nombre entier naturel n , $a_n = 100\,000 - 50\,000 \times 0,8^n$.

(a) Déterminer la limite de la suite (a_n) .

(b) *Toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant ce modèle, donner une estimation de l'année à partir de laquelle, au premier janvier, le nombre d'abonnés à ce jeu sera supérieur à 95 000.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le service qualité d'une entreprise textile contrôle systématiquement la texture et la couleur des tissus qu'elle produit.

Pour être déclaré de "qualité supérieure" un tissu doit subir avec succès les deux contrôles : le premier sur la texture, le second sur la couleur.

À cette fin, le service qualité effectue une étude statistique sur la production d'un mois. Cette étude a montré que :

- 90 % des tissus passent le contrôle sur la texture avec succès,
- Parmi ceux qui ne passent pas avec succès ce premier contrôle, 40 % ont passé le deuxième contrôle sur la couleur avec succès.
- 80 % des tissus sortant de cette entreprise sont déclarés de "qualité supérieure".

Une machine de contrôle de qualité prélève au hasard un échantillon d'un des tissus produits par cette entreprise pendant le mois d'étude.

On considère les événements suivants :

- T : « l'échantillon de tissu prélevé passe avec succès le premier contrôle sur la texture »,
- C : « l'échantillon de tissu prélevé passe avec succès le deuxième contrôle sur la couleur »,
- S : « l'échantillon de tissu prélevé est déclaré de qualité supérieure ».

Ainsi $S = T \cap C$.

Rappels de notation : Soient A et B deux événements,

- *la probabilité de l'événement A est notée $p(A)$;*
- *si $p(B) \neq 0$, $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé ;*
- *l'événement contraire de l'événement A est noté \bar{A} .*

1. À l'aide de l'énoncé, construire un arbre de probabilité décrivant la situation. Il sera complété au cours de la résolution de l'exercice.
2. Démontrer que $p_T(C) = \frac{8}{9}$.
3. Interpréter l'évènement $\bar{T} \cap \bar{C}$, puis calculer la probabilité de cet évènement.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement : « l'échantillon de tissu prélevé ne passe pas avec succès le contrôle sur la couleur » est égale à 0,16.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Une coopérative fabrique une huile précieuse qu'elle commercialise au prix de 100 euros le litre. Sa capacité maximale de production journalière est de 10 litres.

Le coût de production journalier pour la fabrication de cette huile précieuse est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$C(x) = 300 \ln(x + 1).$$

où x désigne la quantité d'huile produite exprimée en litres et $C(x)$ son coût de production journalier exprimé en euros.

La recette journalière de cette coopérative est modélisée par la fonction R définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$R(x) = 100x.$$

où x désigne la quantité d'huile exprimée en litre, produite et vendue, et $R(x)$ sa recette journalière exprimée en euros.

On suppose que toute la production d'un jour est vendue le même jour.

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
2. Construire, sur une feuille de papier millimétré à rendre avec la copie, Γ et Γ' les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques :
 - 1 cm pour un litre sur l'axe des abscisses,
 - 1 cm pour 100 euros sur l'axe des ordonnées.
3. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$. Elle est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$, et on note B' sa fonction dérivée.
 - (a) Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 10]$, $B'(x) = \frac{100x - 200}{x + 1}$.
 - (b) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
 - (c) Démontrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 10]$. Donner une valeur approchée du nombre réel α à 10^{-1} près.
 - (d) En déduire l'étude du signe de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
4. Lorsque $B(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice. Lorsque $B(x)$ est négatif, l'entreprise est en déficit.
 - (a) Déterminer la quantité journalière minimale d'huile, au décilitre près, à produire et à vendre pour que la coopérative réalise un bénéfice journalier positif.
 - (b) Préciser, à l'euro près, le bénéfice journalier maximal que peut réaliser cette coopérative.
 - (c) À l'aide du graphique tracé à la question 2, interpréter les résultats des questions 4.a et 4.b.

Annexe Exercice 2 à rendre avec la copie.

