BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6,
dont une page en annexe à rendre avec la copie.

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous représente l'évolution de l'indice du PIB de la Chine de 1985 à 2005, base 100 en 1985

année	1985	1988	1991	1994	1997	2000	2003	2005
Rang de l'année: x_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	3	6	9	12	15	18	20
Indice du PIB : y_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	100	131,29	172,38	226,32	297,15	390,13	512,22	614,16

Source : Banque Mondiale

On veut étudier l'évolution de l'indice du PIB y en fonction du rang de l'année x.

1. a. Représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 8)$ associé à cette série dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques :

   sur l'axe des abscisses : 1cm pour 1 année ;

   sur l'axe des ordonnées : 1cm pour 50.

   b. Un ajustement affine semble t-il approprié ?

2. Pour $1 \leqslant i \leqslant 8$, on pose $z_i = \ln y_i$.

   Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs de z_i seront arrondies au centième).

Rang de l'année : x_i $1 \leqslant i \leqslant 8$	0	3	6	9	12	15	18	20
$z_i = \ln y_i$ $1 \leqslant i \leqslant 8$								

3. Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Aucune justification n'est demandée.
4. En déduire une estimation de l'indice du PIB de la Chine en 2012 d'après cet ajustement.
5. Dans le cas général donner un ajustement exponentiel de y en fonction de x, sous la forme $y = a\mathrm{e}^{bx}$, les coefficients a et b étant arrondis au centième.

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le centre commercial Commerce Plus est implanté dans une ville. La première semaine, 80% des habitants de la ville viennent faire leurs achats dans ce centre commercial, puis on constate dans les semaines suivantes que :

- la probabilité qu'un habitant étant venu faire des achats dans le centre commercial y retourne la semaine suivante est égale à 0,55 ;
- la probabilité qu'un habitant n'étant pas venu faire des achats dans le centre commercial y aille la semaine suivante est égale à 0,6.

On cherche à étudier l'évolution de la répartition des visites des habitants dans le centre commercial sur plusieurs semaines.

1. On note A l'état : « l'habitant vient faire ses courses au centre commercial ».
   On note B l'état : « l'habitant ne vient pas faire ses courses au centre commercial ».

   a. Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste.

   b. On note M la matrice de transition de ce graphe. Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

2. On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des habitants selon leur venue au centre commercial au cours de la n-ième semaine :
   - a_n représente la proportion d'habitants qui vient faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine,
   - b_n représente la proportion d'habitants qui ne vient pas faire ses courses au centre commercial au cours de la n-ième semaine.

   Ainsi, on a $P_1 = (0,8 \quad 0,2)$.

   a. Calculer P_2 et P_3.

   b. Donner une interprétation de P_3 en termes de répartition des habitants.

3. Soit $P = (x \quad y)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

   a. Déterminer x et y. On donnera les valeurs exactes, puis les résultats arrondis au centième.

   b. Interpréter ces résultats.

Exercice 3 (*4 points*)

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique un produit chimique. Elle peut en produire x mètres cube chaque jour ; on suppose que x appartient à l'intervalle [1 ; 6].
Le coût total de production C_T, exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité produite x :

$$C_T(x) = \frac{x^2}{2} + 4\ln x + 5{,}6 \quad \text{pour } x \in [1\,;6].$$

1. Vérifier que la fonction C_T est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; 6].

2. On note $C_M(x)$ le coût moyen de production en milliers d'euros du mètre cube pour une production journalière de x mètres cube, avec $x \in$ [1 ; 6].
   On rappelle que $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.
   a. Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.
   b. On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle [1 ; 6] et on appelle C'_M sa fonction dérivée. Calculer $C'_M(x)$, et vérifier que $C'_M(x) = \dfrac{x^2 - 3{,}2 - 8\ln x}{2x^2}$ pour tout x de l'intervalle $[1\,;6]$.

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;6]$ par $f(x) = x^2 - 3{,}2 - 8\ln x$.
   a. On admet que f est dérivable sur [1 ; 6]. Étudier les variations de f sur $[1\,;6]$.
   b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans [2 ; 6] ; déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de α.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[1\,;6]$ (on ne demande pas de justification).

4. On prendra pour α la valeur approchée trouvée à la question 3.b.
   a. En utilisant les résultats de la question 3., étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[1\,;6]$. Construire son tableau de variation (les valeurs dans le tableau seront arrondies au dixième).
   b. Quel est le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit ?

5. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Comment faut-il choisir le prix de vente du mètre cube de produit pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices quelle que soit la production choisie dans l'intervalle donné ?

Exercice 4 *(7 points)*

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble des réels **R**. On note f' sa fonction dérivée sur **R**.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative, représentée en ANNEXE 1 dans un repère orthonormé. On appelle (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées (0 ; – 1).

On admet que la fonction f admet un maximum en $x = 3$.

Partie A

Cette partie est un QCM (Questionnaire à Choix Multiple). Chaque question admet une seule réponse exacte. Pour chacune des questions, indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Il n'est pas demandé de justification

Dans cette première partie, une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse fausse enlève 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.

Question 1 :

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Question 2 : sur l'intervalle [– 1; 7] $f'(x)$ vérifie :

- $f'(x) > 0$ sur]1 ; 7]
- $f'(x) < 0$ sur [– 1 ; 0]
- $f'(x) < 0$ sur]3 ; 7]

Question 3 : l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est :

- $y = -1$
- $y = x + 1$
- $y = 1{,}5x - 1$

Question 4 :

- $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$
- $0{,}5 \leqslant \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1{,}5$
- $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$ n'existe pas.

Partie B

On considère la fonction g définie et dérivable sur l'ensemble des réels **R,** telle que

$$g(x) = (-2x - 2) \times \mathrm{e}^{-0{,}5x}$$

On note g' sa fonction dérivée sur **R**.

1. Démontrer que pour tout x appartenant à **R**, $g'(x) = (x - 1) \times e^{-0{,}5x}$
2. Étudier le signe de g' sur **R** et en déduire les variations de g sur **R**.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$. (On utilisera le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-0{,}5x} = 0$).
4. Construire la courbe représentative de g, notée $\mathscr{C}_g$, dans le repère fourni en ANNEXE 1 (sur lequel est construite $\mathscr{C}_f$).
5. Donner graphiquement un encadrement par deux entiers consécutifs des coordonnées de I, point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
6. On admet maintenant que $g' = f$.

   Déterminer par le calcul les coordonnées exactes du point I.
7. Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ; 1] ; on donnera d'abord sa valeur exacte puis sa valeur approchée à 10^{-2} près.

ANNEXE 1

À rendre avec la copie

Exercice 4