

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES

Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 3

**Le sujet se compose de 8 pages numérotées de 1 à 8.
Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.**

*L'usage d'une calculatrice est autorisé,
conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.*

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte deux annexes pages 7/8 et 8/8 à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 : (5 points)

Chaque résultat sera exprimé sous forme de fraction irréductible.

Un arbre est donné en **annexe 1**. Il est à compléter et à rendre avec la copie.

Une grande surface propose le jeu suivant à chacun de ses clients :

On dispose de deux urnes.

- La première urne notée U_1 contient 10 boules indiscernables au toucher : une rouge et neuf noires.
- La deuxième urne notée U_2 contient 5 boules indiscernables au toucher : une rouge et quatre noires.

Le joueur tire au hasard une boule de l'urne U_1 qu'il place dans l'urne U_2 . Il tire ensuite, au hasard, une boule de l'urne U_2 .

Le joueur gagne s'il tire une boule rouge de l'urne U_2 .

On considère les événements suivants :

R_1 : « Le joueur tire une boule rouge de l'urne U_1 » ;

N_1 : « Le joueur tire une boule noire de l'urne U_1 » ;

R_2 : « Le joueur tire une boule rouge de l'urne U_2 » ;

N_2 : « Le joueur tire une boule noire de l'urne U_2 ».

- 1) Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule rouge dans l'urne U_2 sachant qu'il a tiré une boule rouge dans l'urne U_1 ?
- 2) Compléter l'arbre donné en annexe 1.
- 3) a) Montrer que la probabilité pour un joueur de gagner à ce jeu est égale à $\frac{11}{60}$.
b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

À chaque joueur gagnant, la grande surface propose un bon d'achat de 10 euros.

En moyenne chaque semaine 12 000 clients participent au jeu.

Quelle estimation la grande surface peut-elle faire du coût hebdomadaire de ce jeu ?

- 4) Quelle est la probabilité que le client ait tiré une boule rouge dans l'urne U_1 sachant qu'il a gagné à ce jeu ?

EXERCICE 2 : (6 points)

Partie A :

1) On considère l'algorithme suivant (N désigne un entier naturel) :

Entrée : Saisir la valeur de N

Initialisation : Affecter à i la valeur 0
Affecter à P la valeur 63,2

Traitement : Tant que $i < N$
affecter à i la valeur $i + 1$
affecter à P la valeur $1,002 \times P + 0,1$

Sortie : Afficher P

Justifier, en faisant fonctionner l'algorithme, que pour $N = 4$ l'arrondi à 10^{-3} du nombre affiché en sortie est 64,108.

2) L'objectif de cette question est de donner une prévision possible de la population de la France Métropolitaine en 2050.

Au 1^{er} janvier 2010, cette population était de 63 200 000 habitants (source INSEE).

Une équipe de statisticiens prévoit un accroissement naturel annuel de 2 pour 1 000 sur les 40 prochaines années (l'accroissement naturel est la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité).

Cette même équipe estime par ailleurs que le solde migratoire (qui représente la différence entre le nombre de personnes qui sont entrées en France Métropolitaine et le nombre de personnes qui en sont sorties au cours de l'année) sera de 100 000 habitants par an soit 0,1 million.

Soit n un nombre entier naturel. On note P_n la population de la France Métropolitaine (estimée en millions d'habitants) au 1^{er} janvier de l'année $2010 + n$.

Ainsi, d'après ce qui précède, $P_0 = 63,2$ et $P_{n+1} = 1,002 \times P_n + 0,1$.

a) Déterminer les valeurs arrondies à 10^{-3} de P_1 et P_2 .

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout nombre entier naturel n ,
$$P_n = 113,2 \times 1,002^n - 50.$$

c) En déduire une estimation en millions d'habitants de la population française au premier janvier 2050 (on arrondira le résultat à 10^{-3}).

Partie B :

La population peut être également estimée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 40]$ par :

$$f(t) = 113,2e^{0,002t} - 50,$$

où t désigne le nombre d'années écoulées depuis le premier janvier 2010 et où $f(t)$ est exprimé en millions d'habitants.

On utilisera ce modèle pour répondre aux trois questions suivantes.

- 1) Justifier que la population de la France métropolitaine peut être estimée à 72 628 000 habitants au premier janvier 2050.
Comparer ce résultat à celui obtenu dans la partie A.
- 2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 40]$ (on pourra éventuellement déterminer la fonction dérivée de la fonction f).
- 3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?
« En 2040 pour la première fois la population dépassera 70 millions d'habitants ».

EXERCICE 3 : (4 points)

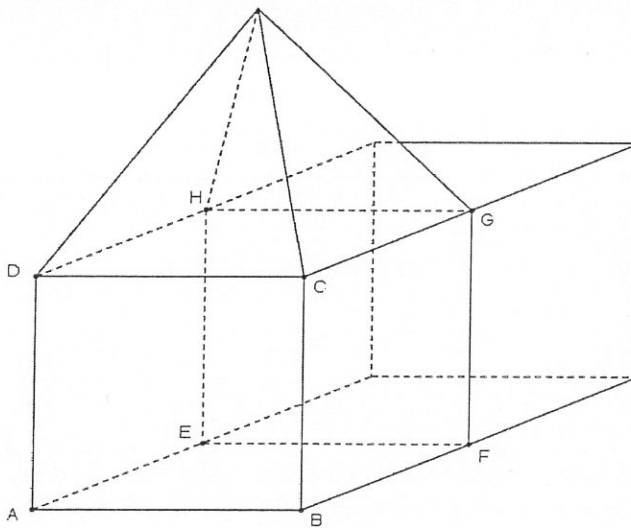
Dans tout l'exercice, on utilisera une lettre majuscule pour désigner un point de l'espace et une lettre minuscule pour désigner une représentation plane de ce point. Par exemple, a représente A . Toutes les constructions seront faites sur l'annexe 2.

Aucune justification des constructions n'est attendue mais les traits de construction seront laissés apparents.

La représentation finale sera repassée en gras ou en couleur afin d'en améliorer la lisibilité.

La figure donnée en annexe 2 présente le dessin en perspective centrale d'un cube $ABCDEFGH$ posé sur un plan horizontal et dont la face $ABCD$ est dans un plan frontal.

- 1) On appelle ω le point de fuite principal de cette représentation en perspective centrale. Construire le point ω .
- 2) On appelle d_1 et d_2 les points de distance de cette représentation en perspective centrale. Construire les points d_1 et d_2 puis tracer la ligne d'horizon.
- 3) La figure ci-dessous donne une représentation en perspective parallèle de l'assemblage décrit dans cette question.



- a) Derrière le cube $ABCDEFGH$, contre la face $EFGH$, on pose un second cube, identique au premier.
Dessiner ce second cube sur l'annexe 2.
- b) Sur la face supérieure du cube $ABCDEFGH$ on pose une pyramide dont la base est le carré $DCGH$ et dont le sommet est à la verticale du centre de cette base.
La hauteur de cette pyramide a une longueur égale à celle d'une arête du cube $ABCDEFGH$.
Dessiner cette pyramide dans la représentation en perspective centrale de l'annexe 2.

EXERCICE 4 : (5 points)

1) a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 25 par 6.

b) En déduire que pour tout nombre entier naturel n ,

$$5^{2n} \equiv 1 \pmod{6} \text{ et } 5^{2n+1} \equiv 5 \pmod{6}.$$

En déduire les restes dans la division euclidienne par 6 des nombres $A = 5^{2011}$ et $B = 5^{2012}$.

c) Quel est le reste dans la division euclidienne par 6 du nombre C qui s'écrit dans le système de numération en base 5 : $C = \overline{(2100)}$?

2) On s'intéresse maintenant à la suite de nombres (A_n) définis pour tout nombre entier naturel n par

$$A_n = 5^n + 5^{2^n}.$$

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3
A_n			
Reste de la division euclidienne de A_n par 6			

b) Dire si chacune des trois propositions suivantes est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

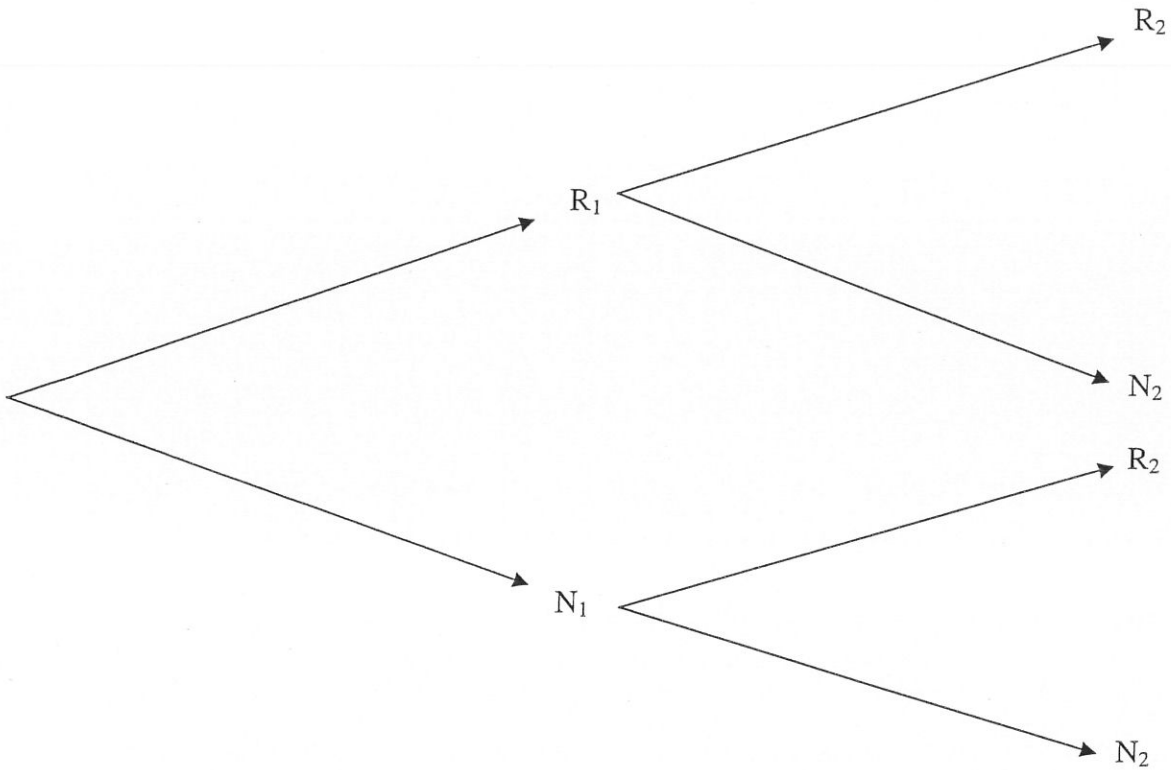
(P₁) : Pour tout nombre entier naturel n , A_n est divisible par 6.

(P₂) : Il existe au moins un nombre entier naturel n tel que $A_n - 2$ est divisible par 6.

(P₃) : Pour tout nombre entier naturel n , A_n est un nombre entier pair.

ANNEXE 1 (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 1 :



ANNEXE 2 (à compléter et à rendre avec la copie)

EXERCICE 3 :

