BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
L'annexe de la page 6 est à rendre avec la copie.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Les parties B et C sont indépendantes.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.

4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a, qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Donner une équation de T_a.

2. Démontrer qu'une tangente à $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4. Donner une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 xe^{x-1}\,dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \dfrac{1}{e}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \ ; \quad b = -2 - i \ ; \quad c = -3 + i.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.

2. Calculer $\dfrac{b}{a}$. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}.$$

a. Calculer l'affixe c' du point C', image de C par f et placer le point C' sur la figure.

b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.

c. Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*

On appelle J l'image du point A par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

On appelle K l'image du point C par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

On note L le milieu de $[JK]$.

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{array}\right. .$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln 2$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. **a.** Vérifier que le couple $(4;6)$ est une solution de l'équation

$$(E) \quad 11x - 5y = 14.$$

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs $(x;y)$ vérifiant l'équation (E).

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$2^{3n} \equiv 1 \pmod 7.$$

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.$$

4. On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{A}{N}$.

A et N sont des entiers naturels,
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que $N \leqslant \sqrt{A}$
    Si $\dfrac{A}{N} - \text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right) = 0$ alors Afficher N et $\dfrac{A}{N}$.
    Fin Si
N prend la valeur $N+1$
Fin Tant que.

Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$?
Que donne cet algorithme dans le cas général ?

ANNEXE 1
Exercice1
À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$ représentative de f