Correction
Obligatoire

Exercice 1

1. D'après le graphique, la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction f' est en dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3;-1]$, par suite pour tout x de l'intervalle $[-3;-1]$, $f'(x) \leqslant 0$. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

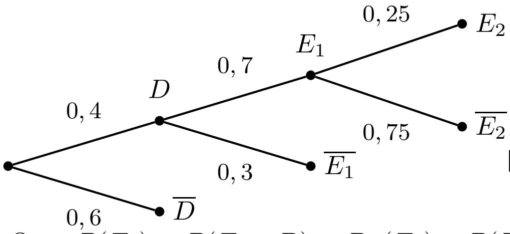
2. D'après le graphique, pour tout $x \in [-1;2]$ on a $f'(x) \leqslant 0$, ainsi la fonction f est croissante sur cette intervalle. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

3. D'après la question précédente, f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;0]$, or d'après l'énoncé $f(0) = -1$, par suite $f(-1) < f(0)$. L'affirmation est FAUSSE. [1 point]

4. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$. Or, $f'(0) = 1$ et $f(0) = -1$, ainsi cette équation est $y = x - 1$ et le point de coordonnées $(1;0)$ appartient bien à cette droite. L'affirmation est VRAIE. [1 point]

Exercice 2

1. a)



[1 point]

b) On a $P(E_1) = P(E_1 \cap D) = P_D(E_1) \times P(D) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$. [0,75 point]

c) $F = \overline{E_2}$. Par ailleurs, $P(E_2) = P(E_2 \cap E_1) = P_{E_1}(E_2) \times P(E_1) = 0,25 \times 0,28 = 0,07$. Par suite, $P(\overline{E_2}) = 0,93$. [0,5 point]

2. a) L'expérience qui consiste pour une de ces personnes à savoir si elle est recrutée ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,07$ dont le succès est «la personne est recrutée». En répétant 5 fois de manière indépendantes cette expérience, on obtient un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui compte ne nombre de succès de ce schéma de Bernoulli suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,07$. [1 point]

b) $P(X = 5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} 0,07^2 \times 0,93^3 \simeq 0,039$ à 10^{-3} près. [0,75 point]

3. Il s'agit de determiner le nombre minimum de dossiers que le cabinet doit traiter pour que la probabilité de ne recruter aucun candidat soit inférieur à $0,001$. La probabilité de ne par recruter un candidat étant de $0,93$, s'agissant de la répétition d'expériences indentiques et indépendantes, il faut trouver n pour que $0,93^n \leqslant 10^{-3}$.

Or, $0,93^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln 0,93 \leqslant -3 \ln 10 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-3\ln 10}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$. Mais, $\dfrac{-3\ln 10}{ln 0,93} \simeq 95,2$. Il au moins traiter 96 dossiers. [1 point]

Exercice 3

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$, en posant $X = \dfrac{x}{x+1}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$, or la fonction ln étant continue en 1, on a $\lim\limits_{X \to 1} \ln X = \ln 1 = 0$. Par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. $x + 1 \neq 0$ et $\dfrac{x}{x+1} > 0$ pour $x \in [1;+\infty[$, par composée et somme de fonction dériavables, f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $u'(x) = \dfrac{1(x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, par suite $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{-x+x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Ainsi, pour $x \in [1;+\infty[$, $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2} - \ln 2$ $\nearrow$	0

3. Puisque $\frac{1}{2} - \ln 2 < 0$, et le tableau de variation de la fonction f, f est négative sur $[1;+\infty[$.

Partie B

1. On trouve $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

2.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0
Traintement :	Pour i variant de 1 à n
	| Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$
Sortie :	Afficher $u - \ln n$

3. La suite (u_n) semble décroissante et convergente vers un réel proche de $0,577$.

Partie C

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{n} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = f(n)$.
D'après la question **3.** de la partie A, on en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout entier naturel n et la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. a) Pour $x \in [k;k+1]$,
on a $k \leqslant x \leqslant k+1$, la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$, en passant à l'intégrale dans l'inégalité, on obtient $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \geqslant 0$.
Or, par linéarité de l'intégrale, $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} \mathrm{d}x - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$. Par suite, $\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$.
Or, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$, ainsi $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

b)
$$\begin{aligned} \ln 2 - \ln 1 &\leqslant 1 \\ \ln 3 - \ln 2 &\leqslant \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \ln(n+1) - \ln n &\leqslant \frac{1}{n} \end{aligned}$$
En ajoutant membres à membres les inégalités, on obtient :
$\ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + ... + \ln(n+1) - \ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

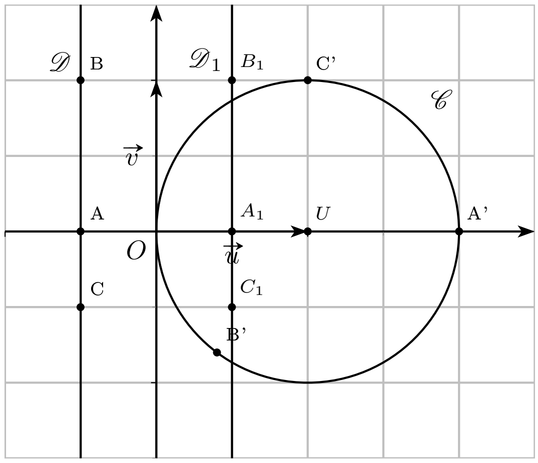
c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente :
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\ln n \geqslant \ln(n+1)-\ln n$, d'où $u_n \geqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Or, pour $n \geqslant 1$, $\frac{n+1}{n} > 1$, par suite $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$.
d'où $u_n \geqslant 0$.

3. (u_n) étant une suite décroissante et minorée par 0, elle converge.

Exercice 4

Obligatoire

1. a)



b) $z_{A'} = \dfrac{1}{z_A + 1} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2,$

$z_{B'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}+1} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\right) = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}.$

$z_{C'} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}+1} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 1+\mathrm{i}.$

c) $z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i} - 2 = \dfrac{8}{5} - \dfrac{4}{5}\mathrm{i}$ et $z_{\overrightarrow{A'C'}} = z_{C'} - z_{A'} = 1+\mathrm{i}-2 = -1+\mathrm{i}$. En observant, leurs affixes, il est clair que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ne sont pas colinéaires et que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. a) g est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 1.

b) Voir la figure.

c) $\mathscr{D}_1$ étant l'image de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$, par la translation g ainsi $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$, c'est donc la médiatrice du segment $[OU]$ où U est le point d'affixe 1.
Ainsi, $M \in \mathscr{D}_1 \Leftrightarrow UM = OM \Leftrightarrow |z-1| = |z|$.

3. a) $A_1 = g(A)$ et $h(A_1) = h \circ g(A) = f(A) = A'$, de même pour $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}^*$,
$\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|1-z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |1-z| = |z| \Leftrightarrow |z-1| = |z|$ car $|1-z| = |-(z-1)| = |z-1|$.

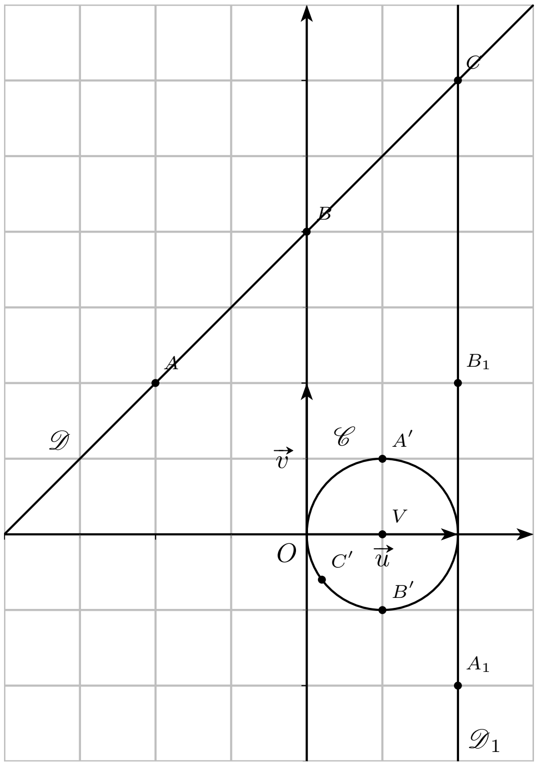
c) Soit $M(z) \in \mathscr{D}_1$, on a $|z-1| = |z|$, donc d'après la question précédente $\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1$, par suite $|h(z)-1| = 1$, ainsi $h(z)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre $U(1)$ et de rayon 1.

4. Puisque $g(\mathscr{D}) = \mathscr{D}_1$ d'après la question **2.b)**, $h \circ g(\mathscr{D}) = h(\mathscr{D}_1) = \mathscr{C}$ d'après la question précédente, d'où $f(\mathscr{D}) = \mathscr{C} \setminus \{O\}$.
L'image de la droite $\mathscr{C}$ par f est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.

Exercice 3

Spécialité

1. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on a $A(-1;1)$, $B(0;2)$ et $C(1;3)$, de plus $-1+2=1$, $0+2=2$ et $1+2=3$, ainsi les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+2$.



2. $(1+\text{i})z+3-\text{i}=0 \Leftrightarrow (1+\text{i})z=-3+\text{i} \Leftrightarrow z=\dfrac{-3+\text{i}}{1+\text{i}}=\dfrac{(-3+\text{i})(1-\text{i})}{2}=\dfrac{-4-2\text{i}}{2}=-2-\text{i}$. D'où $\mathscr{S}=\{-2-\text{i}\}$.
De plus, $-2+2=0 \neq -1$, ainsi le point d'affixe $-2-\text{i}$ n'appartient par à la droite $\mathscr{D}$.

3. a) g est de la forme $z \mapsto az+b$ où a et b sont des nombres complexes avec a non nul, g est alors une similitude directe de rapport $k=|1+\text{i}|=\sqrt{2}$ et d'angle $\theta=\arg(1+\text{i})=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Le centre Ω d'affixe ω vérifie $h(\Omega)=\Omega \Leftrightarrow (1+\text{i})\omega+3-\text{i}=\omega \Leftrightarrow \text{i}\omega=-3+\text{i} \Leftrightarrow \omega=\dfrac{-3+\text{i}}{\text{i}}=1+3\text{i}$. Ainsi $\Omega=C$.

b) $z_{A_1}=(1+\text{i})(-1+\text{i})+3-\text{i}=-2+3-\text{i}=1-\text{i}$.
$z_{B_1}=(1+\text{i})\times 2\text{i}+3-\text{i}=1+\text{i}$.
$z_{C_1}=z_C=1+3\text{i}$ (vu à la question précédente).

c) Par une similitude directe, l'image d'une droite est une droite. D'après la question précédente cette droite passe par les points A_1 et B_1 d'affixes respectives $1-\text{i}$ et $1+\text{i}$ de même partie réelle égale à 1, il s'agit donc de la droite d'équation $x=1$.

4. a) Soit $A'=h(A_1)$, $B'=h(B_1)$ et $C'=h(C_1)$.
On a $z_{A'}=\dfrac{1}{1-\text{i}}=\dfrac{1+\text{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}$, $z_{B'}=\dfrac{1}{1+\text{i}}=\dfrac{1-\text{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}$ et $z_{C'}=\dfrac{1}{1+3\text{i}}=\dfrac{1-3\text{i}}{10}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}\text{i}$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-z}{2z}\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2-z|}{|2z|}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |2-z|=\dfrac{|2z|}{2} \Leftrightarrow |2-z|=\dfrac{2|z|}{2} \Leftrightarrow |z-2|=|z|$ car $|2-z|=|z-2|$.

c) $\mathscr{D}_1$ étant la droite d'équation $x=1$, c'est la médiatrice du segment $[OU]$ où U est le point d'affixe 2.
Soit $M(z) \in \mathscr{D}_1$, on a $|z-2|=|z|$ avec $z \neq 0$, d'où $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, ainsi le point $M_1=h(M)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre V d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

d) Soit $M_1(z_1)$ un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct du point O, on a $\left|z_1-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$. Soit $z=\dfrac{1}{z_1}\neq 0$, on a $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $|z-2|=|z|$. Par suite, le point M d'affixe z est un point de la droite $\mathscr{D}_1$ et puisque $z_1=\dfrac{1}{z}$, $h(M)=M_1$.

5. D'après les questions précédente, $g(\mathscr{D})=\mathscr{D}_1$ et $h(D_1)=\mathscr{C}\setminus\{O\}$, par suite $f(\mathscr{D})=h\circ g(\mathscr{D})=\mathscr{C}\setminus\{O\}$. L'image par f de la droite $\mathscr{D}$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé du point O.