BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2013

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7**

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

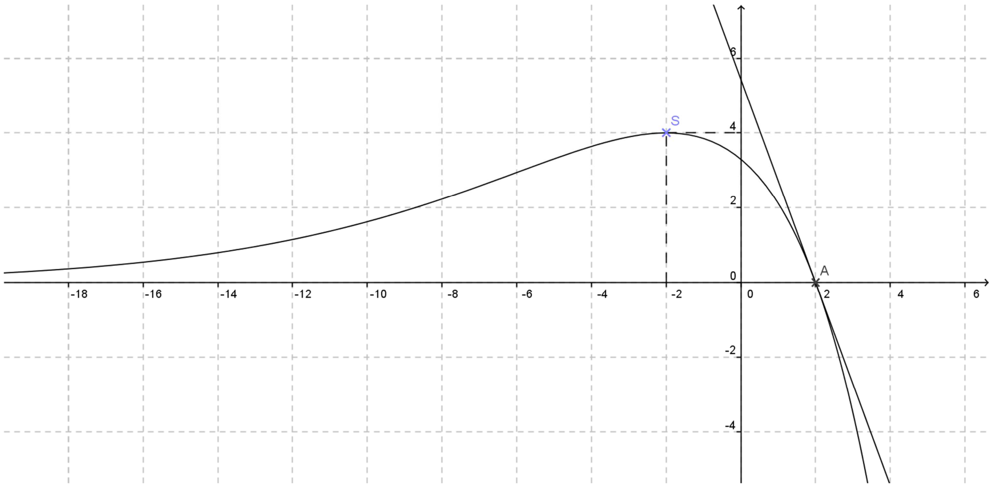
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

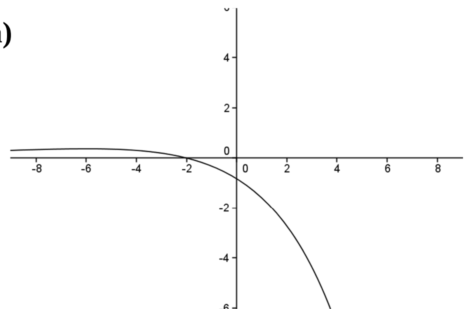
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève aucun point.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur **R** ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.

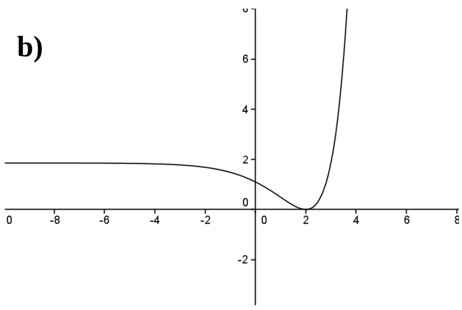


1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?
   a) $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$ **b)** $y = 3x + 2\mathrm{e}$ **c)** $y = \mathrm{e}x + 3\mathrm{e}$ **d)** $y = -5x + 4\mathrm{e}$
2. La fonction f est :
   a) concave sur $]-\infty\,;0]$ **b)** convexe sur $]-\infty\,;0]$ **c)** concave sur $[0\,;2]$ **d)** convexe sur $[0\,;2]$
3. La valeur de $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :
   a) 50e **b)** $16\mathrm{e} - 24\sqrt{\mathrm{e}}$ **c)** $0{,}1\mathrm{e}$ **d)** $-5\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$
4. Parmi les 4 courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction f ?

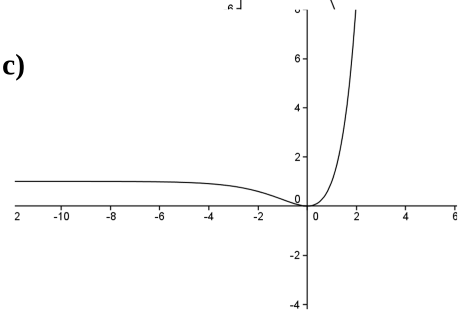
a)



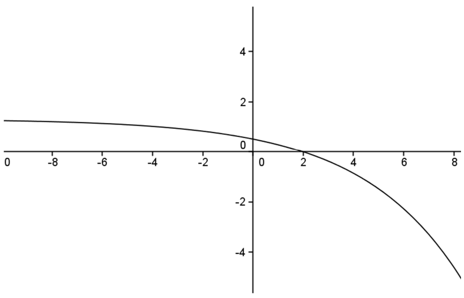
b)



c)



d)



EXERCICE 2 (5 points)

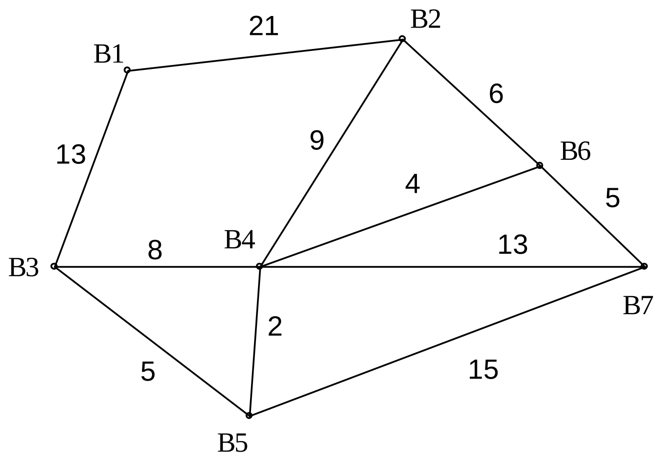
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un club sportif organise une course d'orientation. Sept postes de contrôles (appelés balises) sont prévus.

Les sept balises notées B1 ; B2 ; … ; B7 sont représentées sur le graphe ci-contre. Les arêtes du graphe représentent les chemins possibles entre les balises et sur chaque arête est indiqué le temps de parcours estimé en minutes.



1. a) Le graphe est-il connexe ? Justifier la réponse.

   b) Existe-t-il un parcours qui permet de revenir à une balise de départ en passant une et une seule fois par tous les chemins ? Justifier la réponse.

   c) Existe-t-il un parcours qui permet de relier deux balises différentes en passant une et une seule fois par tous les chemins ?

2. Les organisateurs décident de situer le départ à la balise B1 et l'arrivée à la balise B7. Chaque participant doit rallier la balise B7 en un minimum de temps. Ils ne sont pas tenus à emprunter tous les chemins.

   Quelle est la durée minimale du parcours possible et quel est ce parcours ? Justifier votre réponse à l'aide d'un algorithme.

Partie B

Depuis l'année 2011, ce club sportif propose à ses licenciés une assurance spécifique. La première année, 80% des licenciés y ont adhéré. En 2012, 70% des licenciés ayant adhéré en 2011 ont conservé cette assurance et 60% de ceux n'ayant pas adhéré en 2011 ont adhéré en 2012.

En supposant que cette évolution se maintienne, le club sportif souhaite savoir quel pourcentage de licenciés adhèrera à cette assurance à plus long terme.

On note : A « le licencié est assuré »
B « le licencié n'est pas assuré »

Pour tout entier n non nul, l'état probabiliste du nombre d'assurés l'année 2011 + n est défini par la matrice ligne $P_n = (x_n \quad y_n)$ où x_n désigne la probabilité pour un licencié d'être assuré l'année 2011 + n.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
3. En remarquant que $P_0 = (0{,}8 \quad 0{,}2)$, déterminer P_1. Interpréter ce résultat.
4. Le club sportif maintiendra son offre d'assurance spécifique si le nombre d'assurés reste supérieur à 55%. L'évolution prévue lui permet-elle d'envisager le maintien de son offre à long terme ?

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise qui produit du papier recyclé, a été créée en l'année 2000 et le tableau ci-dessous donne l'évolution de sa production.

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année	0	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes	7 000	18 811	36 620	49 000	58 012	63 098	68 500

1. a) Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme *a*% où *a* est un nombre entier.

b) Déterminer un nombre réel positif qui est solution de l'équation : $x^{12} = 9{,}79$. Interpréter ce nombre en termes de taux d'évolution de la production de cette entreprise entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme *b*% où *b* est un nombre entier.

2. L'entreprise fait appel à un cabinet d'experts pour modéliser l'évolution de la production de l'entreprise afin de faire une projection jusqu'en 2020. Le cabinet d'experts propose la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 20] par :

$$f(x) = 27131 \ln x + 0{,}626x^3$$

où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le nombre de tonnes produites.

a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 20].
Déterminer $f'(x)$ puis les variations de la fonction f sur [2 ; 20].

b) A l'aide de cette modélisation, l'entreprise peut-elle dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2 020 ? Justifier.

3. Une commande de bobines de papier de 2,20 m de large et pesant chacune environ 500 kg est faite à cette entreprise. Le poids d'une bobine varie en fonction de nombreux facteurs.

Soit X la variable aléatoire qui à toute bobine choisie au hasard dans cette commande associe son poids. On admet que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 2$.

a) Toute bobine dont le poids est inférieur à 496 kg est refusée.
Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande soit refusée ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.

b) L'entreprise perd de l'argent pour toute bobine dont le poids est supérieur à 506 kg.
Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4}.

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

La population de l'Allemagne (nombre de personnes résidant sur le territoire allemand) s'élevait à 81 751 602 habitants au premier janvier 2011.

De plus, on sait qu'en 2011, le nombre de naissances en Allemagne ne compense pas le nombre de décès, et sans tenir compte des flux migratoires on estime le taux d'évolution de la population allemande à - 0,22%. On admet que cette évolution reste constante les années suivantes.

Les résultats seront arrondis à l'unité.

Partie A

On propose l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul S.

Traitement :	Affecter à U la valeur 81 751 602 {initialisation}
	Affecter à N la valeur 0. {initialisation}
	
	Tant que U > S
	    Affecter à U la valeur 0,9978×U
	    Affecter à N la valeur N+1
	Fin tant que

Sortie	Afficher N

On saisit en entrée le nombre S = 81 200 000. Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on en sortie ?

U	81 751 602	81 571 748	…	
N	0		…	
Test U > S	Vrai		….	

Partie B

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011 + *n*.

1. Déterminer u_0 et u_1.

2. a) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1er terme 81 751 602 et de raison 0,9978.
   b) Exprimer u_n en fonction de *n*.

3. Si cette évolution de $-0{,}22\%$ se confirme :
   a) Quel serait l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035 ?
   b) En quelle année la population passera-telle au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants ?

Partie C

Dans cette partie, on tient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2011, le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif en Allemagne et s'élève à 49 800 personnes.
On admet de plus que le taux d'évolution de $-0{,}22\%$ ainsi que le solde migratoire restent constants les années suivant 2011.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (v_n) dont on précisera le premier terme v_0 ainsi qu'une relation entre v_{n+1} et v_n.
2. Calculer v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer sur l'évolution de la population de l'Allemagne ?

(Données recueillies par l'Institut national d'études démographiques)