Session 2013

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et soit P un plan.
On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

$$A(0\ ;\ -1\ ;\ 1),\quad B(4\ ;\ -3\ ;\ 0)\ \text{ et }\ C(-1\ ;\ -2\ ;\ -1).$$

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Affirmation 1. Δ est orthogonale à toute droite du plan P.

Affirmation 2. les droites Δ et (AB) sont coplanaires.

Affirmation 3. Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(11\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

Affirmation 4.
La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

EXERCICE 2 (6 points)

(commun à tous les candidats)

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = xe^{-x}.$$

1) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.

2) Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$$

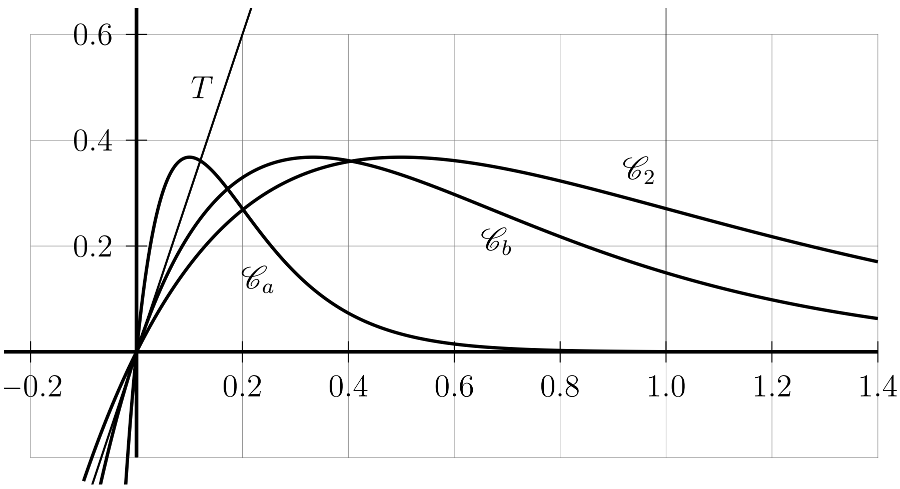
est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4) Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

5) Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1) Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.

2) a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1-kx)e^{-kx}.$$

b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d) Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.

e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

EXERCICE 3 (4 points)

(commun à tous les candidats)

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart-type $\sigma_2 = 0,05$.

1) Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$.
Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?

2) Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre $5,88$ mm et $6,12$ mm. Le tableau donné ci-dessous a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.
Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

k	$p(Y \leqslant k)$
$5,8$	$3,167\ 12$ E $-$ 05
$5,82$	$0,000\ 159\ 109$
$5,84$	$0,000\ 687\ 138$
$5,86$	$0,002\ 555\ 13$
$5,88$	$0,008\ 197\ 536$
$5,9$	$0,022\ 750\ 132$
$5,92$	$0,054\ 799\ 292$
$5,94$	$0,115\ 069\ 67$
$5,96$	$0,211\ 855\ 399$
$5,98$	$0,344\ 578\ 258$
6	$0,5$
$6,02$	$0,655\ 421\ 742$
$6,04$	$0,788\ 144\ 601$
$6,06$	$0,884\ 930\ 33$
$6,08$	$0,945\ 200\ 708$
$6,1$	$0,977\ 249\ 868$
$6,12$	$0,991\ 802\ 464$
$6,14$	$0,997\ 444\ 87$
$6,16$	$0,999\ 312\ 862$
$6,18$	$0,999\ 840\ 891$
$6,2$	$0,999\ 968\ 329$

3) On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'évènement « la pièce est conforme pour le diamètre ». On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

a) Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée
(le résultat sera arrondi à 10^{-2}).

b) Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

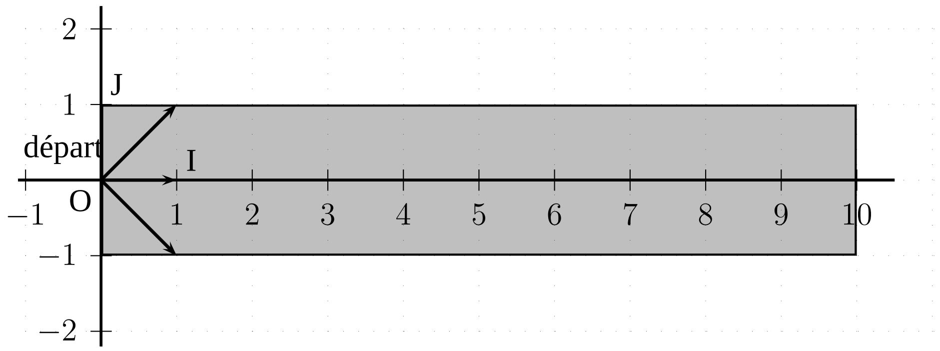
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées $(0\ ;\ 0)$ au début de la traversée. On note $(x\ ;\ y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

x, y, n sont des entiers
Affecter à x la valeur 0
Affecter à y la valeur 0
Tant que $y \geqslant -1$ et $y \leqslant 1$ et $x \leqslant 9$
Affecter à n une valeur choisie au hasard entre $-1,\ 0$ et 1
Affecter à y la valeur $y + n$
Affecter à x la valeur $x + 1$
Fin tant que
Afficher « la position de Tom est » $(x\ ;\ y)$

1) On donne les couples suivants : $(-1\ ;\ 1)$; $(10\ ;\ 0)$; $(2\ ;\ 4)$; $(10\ ;\ 2)$.
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2) Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x\ ;\ y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée -1 ».
B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 ».
C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1) Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.

2) Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$$

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3) Calculer les probabilités $p\left(A_1\right)$, $p\left(B_1\right)$ et $p\left(C_1\right)$.

4) Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5) À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-contre qui donne des valeurs approchées de $a_n,\ b_n,\ c_n$ pour n compris entre 0 et 10.

Donner une valeur approchée à $0,001$ près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	$0,333\ 333$	$0,333\ 333$	$0,333\ 333$
2	$0,222\ 222$	$0,333\ 333$	$0,222\ 222$
3	$0,185\ 185$	$0,259\ 259$	$0,185\ 185$
4	$0,148\ 148$	$0,209\ 877$	$0,148\ 148$
5	$0,119\ 342$	$0,168\ 724$	$0,119\ 342$
6	$0,096\ 022$	$0,135\ 802$	$0,096\ 022$
7	$0,077\ 275$	$0,109\ 282$	$0,077\ 275$
8	$0,062\ 186$	$0,087\ 944$	$0,062\ 186$
9	$0,050\ 043$	$0,070\ 772$	$0,050\ 043$
10	$0,040\ 272$	$0,056\ 953$	$0,040\ 272$