BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703\ ;\ 0,704[$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

EXERCICE 2 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels

Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	    Affecter $K + 1$ à K
	    Affecter U à W
	    Affecter $\dfrac{2U + V}{3}$ à U
	    Affecter $\dfrac{W + 3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V

Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire des résultats des questions 1) b) et 2) a) que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

EXERCICE 3 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,4$.
Montrer qu'une valeur approchée à $0,000\,1$ près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est $0,012\,4$.
On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2) On met en place un contrôle de production tel que $98\ \%$ des billes hors norme sont écartés et $99\ \%$ des billes correctes sont conservées.
On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

a) Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité de l'évènement A.

c) Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de $0,012\,4$.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2) Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Proposition : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2) Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) Proposition : Pour tout nombre réel α, $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.

4) Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

FEUILLE ANNEXE

Annexe, Exercice 3

	A	B
1	d	$P(X < d)$
2	0	$3,06\text{E}-138$
3	1	$2,08\text{E}-112$
4	2	$2,75\text{E}-89$
5	3	$7,16\text{E}-69$
6	4	$3,67\text{E}-51$
7	5	$3,73\text{E}-36$
8	6	$7,62\text{E}-24$
9	7	$3,19\text{E}-14$
10	8	$2,87\text{E}-07$
11	9	$0,00620967$
12	10	$0,5$
13	11	$0,99379034$
14	12	$0,99999971$
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1
24	22	1
25		

Copie d’écran d’une feuille de calcul