Eléments de correction du bac S – 16 avril 2013 Pondichéry

Exercice 1

Partie 1

$h(t)=\dfrac{a}{1+be^{-0,04t}}$ est la hauteur du plant en **mètres**, où t est le temps exprimé en **jours**.

On sait que $h(0)=0,1$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=2$.

$h(0)=\dfrac{a}{1+be^{-0,04\times 0}}=\dfrac{a}{1+b}=0,1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{a}{1+be^{-0,04t}}=a=2$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,04t}=0$

ainsi $\begin{cases}\dfrac{a}{1+b}=0,1\\ a=2\end{cases}$ d'où $a=2$ et $b=19$

Partie 2

$f(t)=\dfrac{2}{1+19e^{-0,04t}}$ sur $[0;250]$.

1. $f'(t)=\dfrac{-2\left(19\times(-0,04)e^{-0,04t}\right)}{\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2}=\dfrac{1,52e^{-0,04t}}{\left(1+19e^{-0,04t}\right)^2}>0$ ainsi *f* est croissante sur $[0;250]$.
2. On cherche la plus petit *t* tel que $f(t)>1,5$

$$\frac{2}{1+19e^{-0,04t}}>1,5$$

$$2>1,5\left(1+19e^{-0,04t}\right)=1,5+28,5e^{-0,04t}$$

$$\frac{1}{57}=\frac{0,5}{28,5}>e^{-0,04t}$$

$$-\ln(57)=\ln\left(\frac{1}{57}\right)>-0,04t$$

$$101,08\approx\frac{\ln(57)}{0,04}<t$$

Le plant atteindra une hauteur supérieure à 1,5 m lors de la 102ième journée.

3. a. $\dfrac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}=\dfrac{2}{\left(e^{0,04t}+19\right)e^{-0,04t}}=\dfrac{2}{1+19e^{-0,04t}}=f(t)$

Soit $F(t)=50\ln\left(e^{0,04t}+19\right)$

$$F'(t) = 50 \times \frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19} = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19} = f(t)$$

ainsi F est bien une primitive de f.

b.

$$\mu = \frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(x)dx = \frac{1}{50}\left[F(x)\right]_{50}^{100} = \frac{1}{50}\left(F(100)-F(50)\right) = \frac{1}{50}\left(50\ln\left(e^4+19\right)-50\ln\left(e^2+19\right)\right)$$

$$\mu = \ln\left(\frac{e^4+19}{e^2+19}\right) \approx 1,03 \text{ arrondi au centième.}$$

La hauteur moyenne du plan entre le 50ième jour et le 100ième jour est d'environ 1,03 mètres.

4. La vitesse de croissance est maximale lorsque $f'(x)$ est maximale, l'énoncé semble suggérer que la résolution est graphique, ainsi d'après la représentation graphique de la fonction f, le nombre dérivé semble maximal lorsque $x = 80$ (lorsque le coefficient directeur de la tangente est le plus grand possible).

   Par lecture graphique, la hauteur est alors d'environ 1,16 mètre.

<u>Exercice 3</u>

On a les points $A(1)$, $B(i)$ et $M(x+iy)$ où $y \neq 0$

M' a pour affixe $z_{M'} = -iz_M$ et I est le milieu de $[AM]$

1. a) $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-i\sqrt{3}$

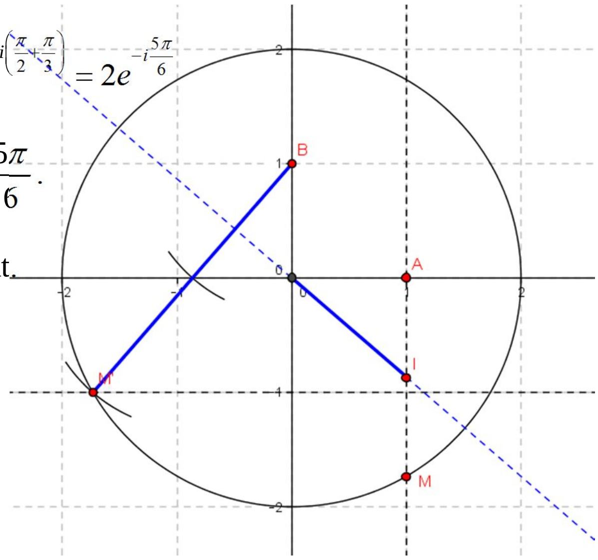
   b) $z_{M'} = -iz_M = -i\left(1-i\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}-i$

   On a $|z_{M'}| = \left|-\sqrt{3}-i\right| = \sqrt{3+1} = 2$ ainsi $z_{M'} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

   Ainsi le module de $z_{M'}$ est 2 et un argument de $z_{M'}$ est $\frac{7\pi}{6}$ (ou encore $-\frac{5\pi}{6}$,…)

   <u>Une autre méthode</u> : $z_{M'} = -iz_M = -i2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

   ainsi $z_{M'}$ a pour module 2 et pour argument par exemple $-\frac{5\pi}{6}$.



   c) Les propriétés 1 et 2 semblent vraies graphiquement.

2. a) $I\left(\frac{z_M+z_A}{2}\right)$ ainsi $I\left(\frac{x+1+iy}{2}\right)$

   b) $z_{M'} = -iz_M = -i(x+iy) = y-ix$

c) $I\left(\dfrac{x+1}{2};\dfrac{y}{2}\right)$, $B(0;1)$ et $M'(y;-x)$

d) (OI) est une hauteur de OBM' si et seulement si $\overrightarrow{OI}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BM'}$

si et seulement si $\overrightarrow{OI}\bullet\overrightarrow{BM'}=0$

or $\overrightarrow{OI}\bullet\overrightarrow{BM'}=\dfrac{x+1}{2}\times y+\dfrac{y}{2}\times(-x-1)=0$ car le repère est orthonormé et

$\overrightarrow{OI}\left(\dfrac{x+1}{2};\dfrac{y}{2}\right)$ et $\overrightarrow{BM'}(y;-x-1)$

ainsi (OI) est une hauteur de OBM'

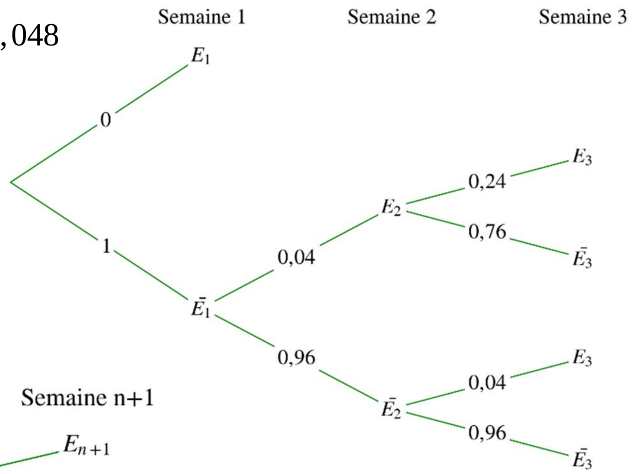
e) $BM'=\left\|\overrightarrow{BM'}\right\|=\sqrt{y^2+(x+1)^2}$ et $OI=\left\|\overrightarrow{OI}\right\|=\sqrt{\left(\dfrac{y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{(x+1)^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{y^2+(x+1)^2}$

ainsi $BM'=2\,OI$

Exercice 4

1. a) $p_3=P(E_3)=1\times 0,04\times 0,24+1\times 0,96\times 0,04=0,048$

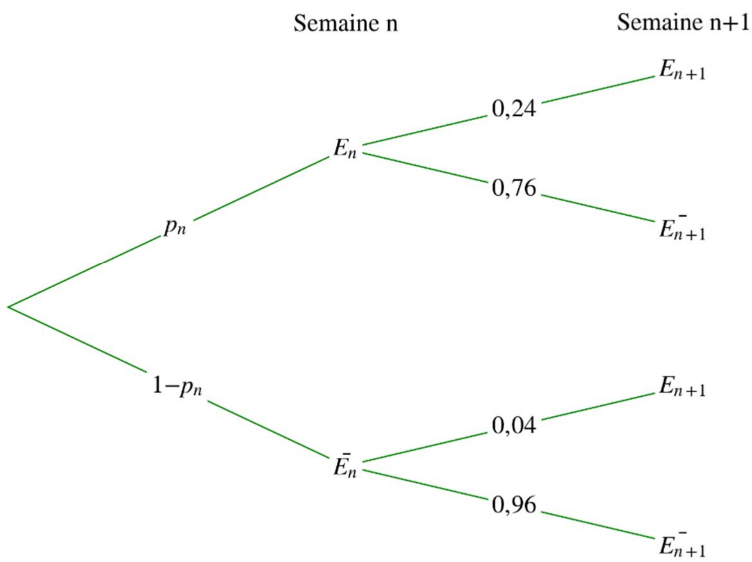
d'après l'arbre ci-contre.



b) $P_{E_3}(E_2)=\dfrac{P(E_2\cap E_3)}{P(E_3)}=\dfrac{0,04\times 0,24}{0,048}=0,2$

d'après l'arbre ci-contre.

2. a)



b) $p_{n+1}=P(E_{n+1})=P(E_n\cap E_{n+1})+P(\overline{E_n}\cap E_{n+1})$ par la formule des probabilités totales

$P(E_{n+1})=P(E_n)\times P_{E_n}(E_{n+1})+P(\overline{E_n})\times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$$p_{n+1} = 0,24p_n + (1-p_n)\times 0,04 = 0,2p_n + 0,04$$

c) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2u_n$

ainsi $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$ et de raison $r = 0,2$.

ainsi $u_n = r^{n-1}u_1 = -0,05\times r^{n-1}$

$$p_n = u_n + 0,05 = -0,05\times r^{n-1} + 0,05 = 0,05(1-r^{n-1})$$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,05(1-r^{n-1}) = 0,05$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n-1} = 0$ car $-1 < r = 0,2 < 1$

e) Les valeurs de P correspondent aux termes de la suite (p_n).

J correspond à la première valeur de la suite (p_n) proche de 0,5 à 10^{-K} près.

On suppose que (p_n) est croissante, et on a montré qu'elle converge vers 0,05, ainsi pour tout K entier naturel, la suite tôt ou tard dépassera $0,05 - 10^{-K}$. Ainsi l'algorithme devra s'arrêter.

3. a) X suit une loi binomiale de paramètre $p = 0,05$ et $n = 220$. En effet, on a une loi de Bernouilli, soit une personne est malade, soit elle n'est pas malade. Le succès est qu'elle soit malade, car X compte le nombre de personnes malades, ainsi $p = 0,05$. On répète cette expérience de Bernouilli de manière indépendante sur les 220 salariés de l'entreprise : ainsi $n = 220$. Finalement X suit une loi binomiale.

$$\mu = E(X) = np = 220\times 0,05 = 11 \text{ et } \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{11\times 0,95} = \sqrt{10,45} \approx 3,23$$

b) ***<u>Méthode n°1</u>*** (sans calculatrice – avec la table donnée)

$$P(7\leq X\leq 15) = P(7-11\leq X-\mu\leq 15-11) = P\left(\frac{-4}{\sigma}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{4}{\sigma}\right)\approx P(-1,24\leq Z\leq 1,24)$$

$P(7\leq X\leq 15) = P(Z\leq 1,24) - P(Z\leq -1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784 \approx 0,78$ arrondi à 10^{-2} près

remarque : ***<u>Méthode n°2</u>*** (pour vérification) (avec calculatrice – sans la table donnée)

$P(7\leq X\leq 15) = Ndc(a,b,\sigma,\mu) = Ndc(7,15,\sqrt{10,45},11)\approx 0,78$ arrondi à 10^{-2} près