

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Série scientifique

SESSION 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée 4 heures – coefficient 9

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES QUATRE EXERCICES

\* \* \* \*

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.  
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique est autorisée, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.

Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table. En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.

Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits. (circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Ce sujet comporte 7 pages dont une annexe en page 7.

L'annexe (page 7) est à compléter et à rendre avec la copie.

Le candidat numérottera les feuillets rendus.

### EXERCICE 1 : (4 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.

Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ont pour coordonnées respectives  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(3, 3, 8)$ ,  $C(-3, 5, 4)$  et  $D(1, 2, 3)$ .

On note  $\mathcal{D}$  la droite ayant pour représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

et  $\mathcal{D}'$  la droite ayant pour représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 3 \\ z = -k + 4 \end{cases}, k \in \mathbf{R}.$$

On note  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x + y - z + 2 = 0$ .

#### Question 1 :

*Proposition a* : Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles.

*Proposition b* : Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont coplanaires.

*Proposition c* : Le point  $C$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$ .

*Proposition d* : Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont orthogonales.

#### Question 2 :

*Proposition a* : Le plan  $\mathcal{P}$  contient la droite  $\mathcal{D}$  et est parallèle à la droite  $\mathcal{D}'$ .

*Proposition b* : Le plan  $\mathcal{P}$  contient la droite  $\mathcal{D}'$  et est parallèle à la droite  $\mathcal{D}$ .

*Proposition c* : Le plan  $\mathcal{P}$  contient la droite  $\mathcal{D}$  et est orthogonal à la droite  $\mathcal{D}'$ .

*Proposition d* : Le plan  $\mathcal{P}$  contient les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

#### Question 3 :

*Proposition a* : Les points  $A$ ,  $D$  et  $C$  sont alignés.

*Proposition b* : Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

*Proposition c* : Le triangle  $ABC$  est équilatéral.

*Proposition d* : Le point  $D$  est le milieu du segment  $[AB]$ .

#### Question 4 :

On note  $\mathcal{P}'$  le plan contenant la droite  $\mathcal{D}'$  et le point  $A$ . Un vecteur normal à ce plan est :

*Proposition a* :  $\vec{n}(-1, 5, 4)$

*Proposition b* :  $\vec{n}(3, -1, 2)$

*Proposition c* :  $\vec{n}(1, 2, 3)$

*Proposition d* :  $\vec{n}(1, 1, -1)$

## EXERCICE 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication  $F_1$  et  $F_2$ .

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.*

### Partie A

La chaîne de production  $F_2$  semble plus fiable que la chaîne de production  $F_1$ . Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne  $F_1$  et 30 % de la chaîne  $F_2$ .

La chaîne  $F_1$  produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne  $F_2$  en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale.

On considère les événements :

$E$  : « Le petit pot provient de la chaîne  $F_2$ . »

$C$  : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production  $F_1$ . »
3. Déterminer la probabilité de l'événement  $C$ .
4. Déterminer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité de l'événement  $E$  sachant que l'événement  $C$  est réalisé.

### Partie B

1. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne  $F_1$ , associe sa teneur en sucre.

On suppose que  $X$  suit la loi normale d'espérance  $m_1 = 0,17$  et d'écart-type  $\sigma_1 = 0,006$ .

Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

$\alpha$	$\beta$	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
0,13	0,15	0,0004
0,14	0,16	0,0478
0,15	0,17	0,4996
0,16	0,18	0,9044
0,17	0,19	0,4996
0,18	0,20	0,0478
0,19	0,21	0,0004

Donner une valeur approchée à  $10^{-4}$  près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne  $F_1$  soit conforme.

2. On note  $Y$  la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne  $F_2$ , associe sa teneur en sucre.

On suppose que  $Y$  suit la loi normale d'espérance  $m_2 = 0,17$  et d'écart-type  $\sigma_2$ .

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne  $F_2$  soit conforme est égale à 0,99.

Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z = \frac{Y - m_2}{\sigma_2}$ .

a. Quelle loi la variable aléatoire  $Z$  suit-elle ?

b. Déterminer, en fonction de  $\sigma_2$ , l'intervalle auquel appartient  $Z$  lorsque  $Y$  appartient à l'intervalle  $[0,16 ; 0,18]$ .

c. En déduire une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\sigma_2$ .

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire  $Z$  suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

$\beta$	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,4324	0,985
2,4573	0,986
2,4838	0,987
2,5121	0,988
2,5427	0,989
2,5758	0,990
2,6121	0,991
2,6521	0,992
2,6968	0,993

**EXERCICE 3 : (6 points) Commun à tous les candidats**

Étant donné un nombre réel  $k$ , on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$ .

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A**

Dans cette partie on choisit  $k=1$ . On a donc, pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ .

La représentation graphique  $\mathcal{C}_1$  de la fonction  $f_1$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de  $f_1(x)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$  et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Démontrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .
3. On appelle  $f_1'$  la fonction dérivée de  $f_1$  sur  $\mathbf{R}$ . Calculer, pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x)$ .  
En déduire les variations de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbf{R}$ .
4. On définit le nombre  $I = \int_0^1 f_1(x) dx$ . Montrer que  $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ . Donner une interprétation graphique de  $I$ .

**Partie B**

Dans cette partie, on choisit  $k = -1$  et on souhaite tracer la courbe  $\mathcal{C}_{-1}$ , représentant la fonction  $f_{-1}$ .

Pour tout réel  $x$ , on appelle  $P$  le point de  $\mathcal{C}_1$  d'abscisse  $x$  et  $M$  le point de  $\mathcal{C}_{-1}$  d'abscisse  $x$ .

On note  $K$  le milieu du segment  $[MP]$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$ .
2. En déduire que le point  $K$  appartient à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .
3. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_{-1}$  sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_{-1}$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 1$ .

**Partie C**

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre  $k$ .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel  $k$ , la représentation graphique de la fonction  $f_k$  est strictement comprise entre les droites d'équations  $y = 0$  et  $y = 1$ .
2. Quelle que soit la valeur du réel  $k$ , la fonction  $f_k$  est strictement croissante.
3. Pour tout réel  $k \geq 10$ ,  $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$ .

**EXERCICE 4 : (5 points) Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité mathématiques**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 8$  et, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

- Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
- Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on souhaite calculer  $u_n$  à l'aide de l'algorithme suivant :

**Variables :**  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels  
 $i$  et  $n$  sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

**Initialisation :**  $a$  prend la valeur 3  
 $b$  prend la valeur 8

**Traitement :** Saisir  $n$   
 Pour  $i$  variant de 2 à  $n$  faire  
     |  $c$  prend la valeur  $a$   
     |  $a$  prend la valeur  $b$   
     |  $b$  prend la valeur .....  
 Fin Pour

**Sortie :** Afficher  $b$

- Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

$n$	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$u_n$	4502	13378	39878	119122	356342	1066978	3196838	9582322	28730582

- Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite  $(u_n)$  ?

- Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $C_n$  la matrice colonne  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

On note  $A$  la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $C_{n+1} = AC_n$ .

Déterminer  $A$  et prouver que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $C_n = A^n C_0$ .

- Soient  $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $QP$ .

- On admet que  $A = PDQ$ .

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $A^n = PD^nQ$ .

- À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.  
 Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ . La suite  $(u_n)$  a-t-elle une limite ?

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie.

Représentation graphique  $\mathcal{C}_1$  de la fonction  $f_1$

