Session 2013

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x^2e^x - 1.$$

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703\ ;\ 0,704[$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

EXERCICE 2 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels

Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	    Affecter $K+1$ à K
	    Affecter U à W
	    Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	    Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V

Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire des résultats des questions 1) b) et 2) a) que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

EXERCICE 3 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.
Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type $0,4$.
Montrer qu'une valeur approchée à $0,000\,1$ près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est $0,012\,4$.
On pourra utiliser la table de valeurs donnée en annexe.

2) On met en place un contrôle de production tel que $98\ \%$ des billes hors norme sont écartés et $99\ \%$ des billes correctes sont conservées.
On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

a) Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité de l'évènement A.

c) Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.
On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de $0,012\,4$.
On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2) Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4) Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

EXERCICE 4 (5 points)

(candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.

On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « $\star$ » considéré comme un caractère.

Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

- Premièrement : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant.
  On a donc $a \to 0,\ b \to 1, \dots z \to 25$.

  On associe au séparateur « $\star$ »le nombre 26.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	$\star$
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

  On dit que a a pour rang $0, b$ a pour rang 1, ... , z a pour rang 25 et le séparateur « $\star$ » a pour rang 26.

- Deuxièmement : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x + 3$ par 27.
  On remarquera que pour tout x de $E,\ g(x)$ appartient à E.

- Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple : $s \to 18, \quad g(18) = 21$ et $21 \to v$. Donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1) Trouver tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$ c'est-à-dire invariants par g.

En déduire les caractères invariants dans ce codage.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E, si $y \equiv 4x + 3$ modulo 27 alors $x \equiv 7y + 6$ modulo 27.

En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3) Proposer une méthode de décodage.

4) Décoder le mot « vfv ».

FEUILLE ANNEXE

Annexe, Exercice 3

	A	B
1	d	$P(X < d)$
2	0	$3,06\text{E}-138$
3	1	$2,08\text{E}-112$
4	2	$2,75\text{E}-89$
5	3	$7,16\text{E}-69$
6	4	$3,67\text{E}-51$
7	5	$3,73\text{E}-36$
8	6	$7,62\text{E}-24$
9	7	$3,19\text{E}-14$
10	8	$2,87\text{E}-07$
11	9	$0,00620967$
12	10	$0,5$
13	11	$0,99379034$
14	12	$0,99999971$
15	13	1
16	14	1
17	15	1
18	16	1
19	17	1
20	18	1
21	19	1
22	20	1
23	21	1
24	22	1
25		

Copie d'écran d'une feuille de calcul