

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2014

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n°99-186 du 16 novembre 1999.

*_*_*_*

Le candidat doit traiter les quatre exercices

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (4 points)
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1;-1;-1)$, $B(1;1;1)$, $C(0;3;1)$, et le plan \mathcal{P} d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1

Soit \mathcal{D}_1 la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 1)$ passant par A.

Une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D}_1 est :

- | | |
|--|---|
| <p>a. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \quad (t \in \mathbf{R}); \\ z = 1 - t \end{cases}$</p> | <p>b. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbf{R}); \\ z = 1 + t \end{cases}$</p> |
| <p>c. $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \quad (t \in \mathbf{R}); \\ z = 1 + 2t \end{cases}$</p> | <p>d. $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -2 + t \quad (t \in \mathbf{R}). \\ z = 3 - 4t \end{cases}$</p> |

Question 2

Soit \mathcal{D}_2 la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \quad (t \in \mathbf{R}). \\ z = 2 - 2t \end{cases}$

- a. La droite \mathcal{D}_2 et le plan \mathcal{P} ne sont pas sécants.
- b. La droite \mathcal{D}_2 est incluse dans le plan \mathcal{P} .
- c. La droite \mathcal{D}_2 et le plan \mathcal{P} se coupent au point $E\left(\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$.
- d. La droite \mathcal{D}_2 et le plan \mathcal{P} se coupent au point $F\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{22}{3}\right)$.

Question 3

- a. L'intersection du plan \mathcal{P} et du plan (ABC) est réduite à un point.
- b. Le plan \mathcal{P} et le plan (ABC) sont confondus.
- c. Le plan \mathcal{P} coupe le plan (ABC) selon une droite.
- d. Le plan \mathcal{P} et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle \widehat{BAC} , arrondie au dixième de degré, est égale à :

- a. $22,2^\circ$
- b. $0,4^\circ$
- c. $67,8^\circ$
- d. $1,2^\circ$

Exercice 2 (6 points)
Commun à tous les candidats

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart-type σ .

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 45,5}{\sigma}$.

1. a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
b) Déterminer $P(X \leq \mu)$.
2. En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $P(37,9 \leq X \leq 53,1)$. Arrondir la valeur au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1 %. On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.

On note α l'unique réel tel que $P(X \leq \alpha) = 0,995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α .

On définit les événements :

M : « l'individu est porteur de la maladie V » ;

S : « l'individu a plus de 50 ans » ;

H : « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $P(M) = 0,01$, $P_M(S) = 0,9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.

D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V .

1. a) Déterminer $P(M \cap S)$.
b) On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.
2. a) Calculer la probabilité $P(H)$.
b) L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α . Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V . Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V .

- Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille 1000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.
- Dans un échantillon aléatoire de 1000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V.
Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95 %, que le gène a une influence sur la maladie ?

Exercice 3 (5 points)
Commun à tous les candidats

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur, peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1 ; 1]$ par $g(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$, où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation :

$$(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0.$$

Dans la suite, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geq 0$.

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction f .
Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.
- On note f'' la fonction dérivée de f' .
Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.
- Montrer que, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 .
- Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0, x_0]$.
 - Calculer $f(2)$.
En déduire que, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.
- On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre a .

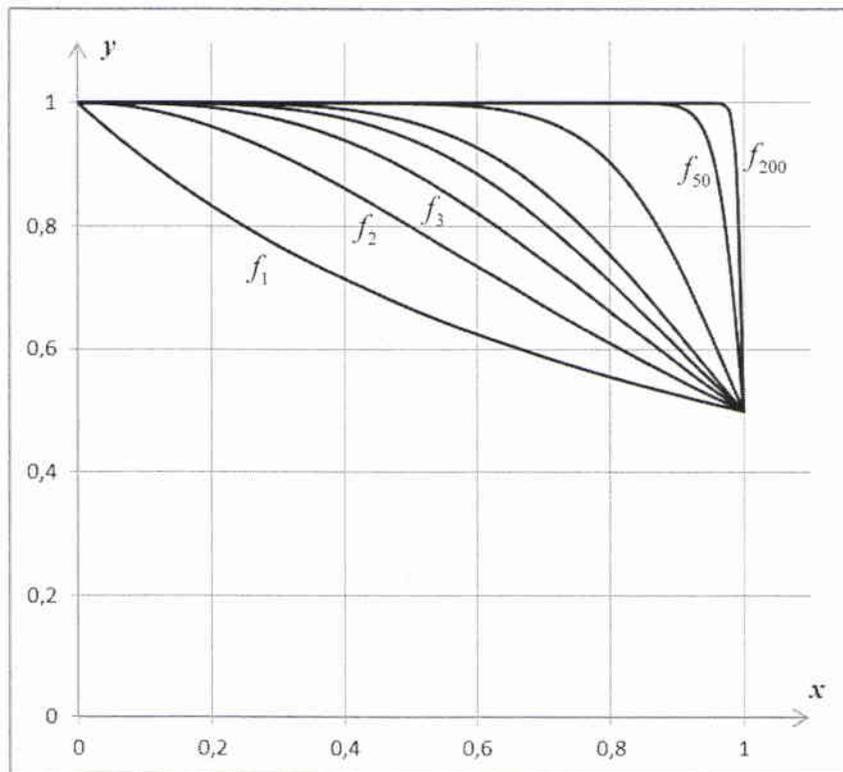
Exercice 4 (5 points)
Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n , obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) , l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1 .
3. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $I_n \leq 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1-x^n) dx$.
6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.
7. On considère l'algorithme suivant :

Variables : $n, p,$ et k sont des entiers naturels
 x et I sont des réels

Initialisation : I prend la valeur 0

Traitement : Demander un entier $n \geq 1$
 Demander un entier $p \geq 1$
 Pour k allant de 0 à $p-1$ faire :

x prend la valeur $\frac{k}{p}$

I prend la valeur $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$

Fin Pour
 Afficher I

- a) Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?
 On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

| k | x | I |
|-----|-----|-----|
| 0 | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| 4 | | |

- b) Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .