BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2014

MATHÉMATIQUES

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.
L'annexe en page 5/5 est à rendre avec la copie.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante choisie.

1. Soit x un réel quelconque, e^{-4x} est égal à :

   (a) $\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-4}$ (b) $-\mathrm{e}^{4x}$ (c) $x \times \mathrm{e}^{-4}$ (d) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{4x}}$

2. L'intégrale $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ est égale à :

   (a) 5 (b) 10 (c) 2,5 (d) 1

3. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 0,98.
   (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2,8$ et de raison 1,02.
   Le plus petit entier n vérifiant $u_n \leqslant v_n$ est :

   (a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17

4. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\dfrac{5}{3}$.
   On donne l'algorithme suivant :

Variables	n, u
Initialisation	u prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que u <1000
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $u \times \dfrac{5}{3}$
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

   Cet algorithme affiche en sortie :
   (a) la valeur de u_{1001}
   (b) la plus grande valeur de n vérifiant $u_n < 1000$
   (c) la plus petite valeur de n vérifiant $u_n \geqslant 1000$
   (d) la plus petite valeur de u_n vérifiant $u_n \geqslant 1000$

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{4}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

   La fonction f est une solution de l'équation différentielle :

   (a) $y'' + y = 0$ (b) $16y'' - 9y = 0$ (c) $9y'' + 16y = 0$ (d) $9y'' - 16y = 0$

EXERCICE 2 (4 points)

Dans cet exercice, on s'intéresse à deux types A et B de téléviseurs à écran plat.
Les réponses aux questions 1.(a), 1.(b) et 1.(c) seront arrondies au centième.

1. La durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un téléviseur du type A, avant que survienne la première panne, est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-5}$.
   (a) Calculer la probabilité que la première panne survienne avant la $32\,000^e$ heure de fonctionnement.
   (b) On s'intéresse à un téléviseur de type A fonctionnant chaque jour pendant 4 heures. Calculer la probabilité que la première panne d'écran ne survienne pas avant 10 ans.
   On prendra 1 année = 365 jours.
   (c) Calculer la probabilité que la première panne survienne après 10 000 heures et avant 40 000 heures de fonctionnement.
   (d) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et en donner une interprétation.
2. La durée de fonctionnement avant la première panne d'un téléviseur de type B est modélisée par une variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ'.
   Une étude statistique a permis d'évaluer $P(Y \leqslant 32\,000) = 0,8$.
   Calculer la valeur arrondie à 10^{-5} de λ'.

EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unités 5 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, $\overline{z}$ est le nombre complexe conjugué de z.

PARTIE A

1. Donner les écritures algébriques de z, de $\overline{z}$ et de $\frac{1}{2}\overline{z}$.
2. On considère le nombre complexe $p = \dfrac{2+\overline{z}}{2-\overline{z}}$.
   (a) Montrer que $p = -\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   (b) Les points M, N et P sont les points d'affixes respectives 1, $\frac{1}{2}\overline{z}$ et p. Placer ces trois points dans le repère. Justifier l'alignement de ces trois points.

PARTIE B

Soit u le nombre complexe défini par $u = \frac{1}{2}z$.

1. Écrire u sous la forme exponentielle.
2. (a) Donner l'écriture exponentielle puis l'écriture algébrique de u^3.
   (b) Vérifier les relations suivantes : $u^4 = -u$ et $u^5 = -u^2$.
   (c) Vérifier que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = 1$.

EXERCICE 4 (6 points)

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x)\ln x$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal est donnée sur la feuille **ANNEXE**.

1. Lire sur le graphique la limite de la fonction f en 0. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de $f(x)$.
2. Montrer que la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est définie par $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x est dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis donner les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. (a) On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses (Voir le graphique). Calculer les abscisses des points A et B.

   (b) Calculer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur le graphique donné en annexe.
5. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -x(\ln x)^2 + 4x\ln x - 4x$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
6. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.

   (a) Hachurer sur le graphique donné en annexe le domaine $\mathscr{D}$.

   (b) Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

ANNEXE à remettre avec la copie