BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2014

MATHÉMATIQUES

Séries STI2D et STL spécialité SPCL

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie la réponse choisie.

Dans les questions 1. et 2., on considère le complexe $z = -2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

1. Le complexe z^3 est égal à :

   a. 8 **b.** -8 **c.** 8i **d.** -8i

2. Un argument de z est :

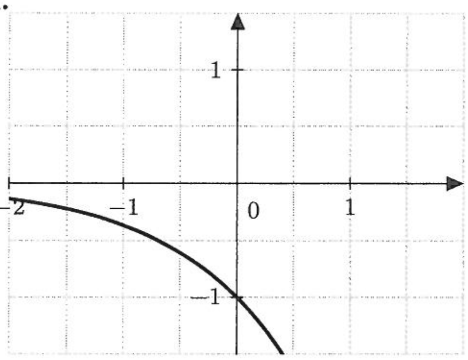
   a. $-\dfrac{2\pi}{3}$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}$ **c.** $-\dfrac{\pi}{3}$ **d.** $\dfrac{\pi}{3}$

3. On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 2$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels.
   Une solution f de cette équation est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

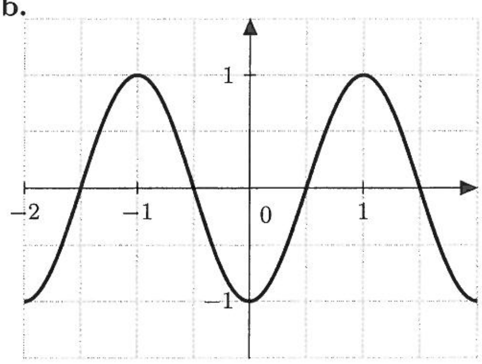
   a. $f(x) = 2\mathrm{e}^{-3x}$ **b.** $f(x) = \mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{3}$ **c.** $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$ **d.** $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}$

4. La solution f de l'équation différentielle $y'' + 4\pi^2 y = 0$ qui vérifie $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$ admet comme représentation graphique :

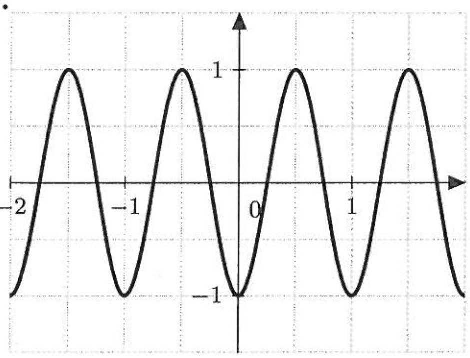
a.



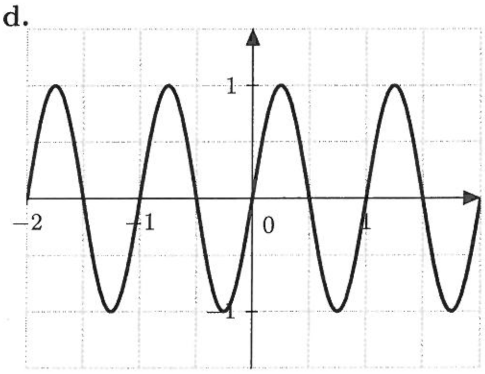
b.



c.



d.



EXERCICE 2 (4 points)

« *En 2009, les Français ont en moyenne produit 374 kg de déchets ménagers par habitant.* »
Source Ademe

Le maire d'une commune de 53 700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23 000 tonnes de déchets en 2009. Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.

Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5% par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.
2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.
   (a) Montrer que $d_1 = 0,985 d_0$.
   (b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Exprimer d_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (d_n).
   (c) Quelle devrait être, à ce rythme là, la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel d.		
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0	
	Affecter à d la valeur 400	
Traitement :	Tant que d > 374	
		Affecter à N la valeur N + 1
		Affecter à d la valeur 0,985d
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher N	

Donner la valeur affichée pour N et interpréter ce résultat.

EXERCICE 3 (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande quantité des emballages alimentaires de forme cubique en polypropylène.

Elle utilise pour cela la technique du thermoformage, qui consiste à chauffer une plaque de plastique puis à la former à l'aide d'un moule. Lors du refroidissement, la pièce rétrécit légèrement mais conserve la forme du moule.

L'objectif de cet exercice est d'analyser la qualité d'une production de boîtes cubiques.

A. Loi normale

Une boîte est jugée conforme lorsque la mesure de son arête, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [16,7 ; 17,3].
La mesure de l'arête d'une boîte est modélisée par une variable aléatoire C qui suit la loi normale d'espérance 17 et d'écart type $0,14$.

1. Calculer $P(16,7 \leqslant C \leqslant 17,3)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une boîte prélevée au hasard dans la production soit non conforme.

B. Loi binomiale

L'entreprise conditionne ces boîtes par lots de 200. On prélève au hasard une boîte dans la production. On note p la probabilité de l'événement : « la boîte prélevée au hasard dans la production est non conforme ».

On prélève au hasard 200 boîtes dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 200 boîtes, associe le nombre de boîtes non conformes qu'il contient. On admet que X suit une loi binomiale de paramètres 200 et p, et, qu'en moyenne chaque lot de 200 boîtes en contient 6 non conformes.

1. Justifier que $p = 0,03$.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux boîtes non conformes dans ce lot de 200 boîtes.

C. Intervalle de fluctuation

On rappelle que, pour une proportion p connue dans une production, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% d'une fréquence calculée sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Dans le cadre d'un fonctionnement correct du thermoformage, on admet que la proportion p de boîtes non conformes dans la production est 3%.

1. Déterminer les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 200.
2. On contrôle le bon fonctionnement du thermoformage en prélevant au hasard dans la production des échantillons de 200 boîtes. Au cours de l'un de ces contrôles, un technicien a compté 10 boîtes non conformes.
   Doit-il prendre la décision d'effectuer des réglages sur la thermoformeuse ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (7 points)

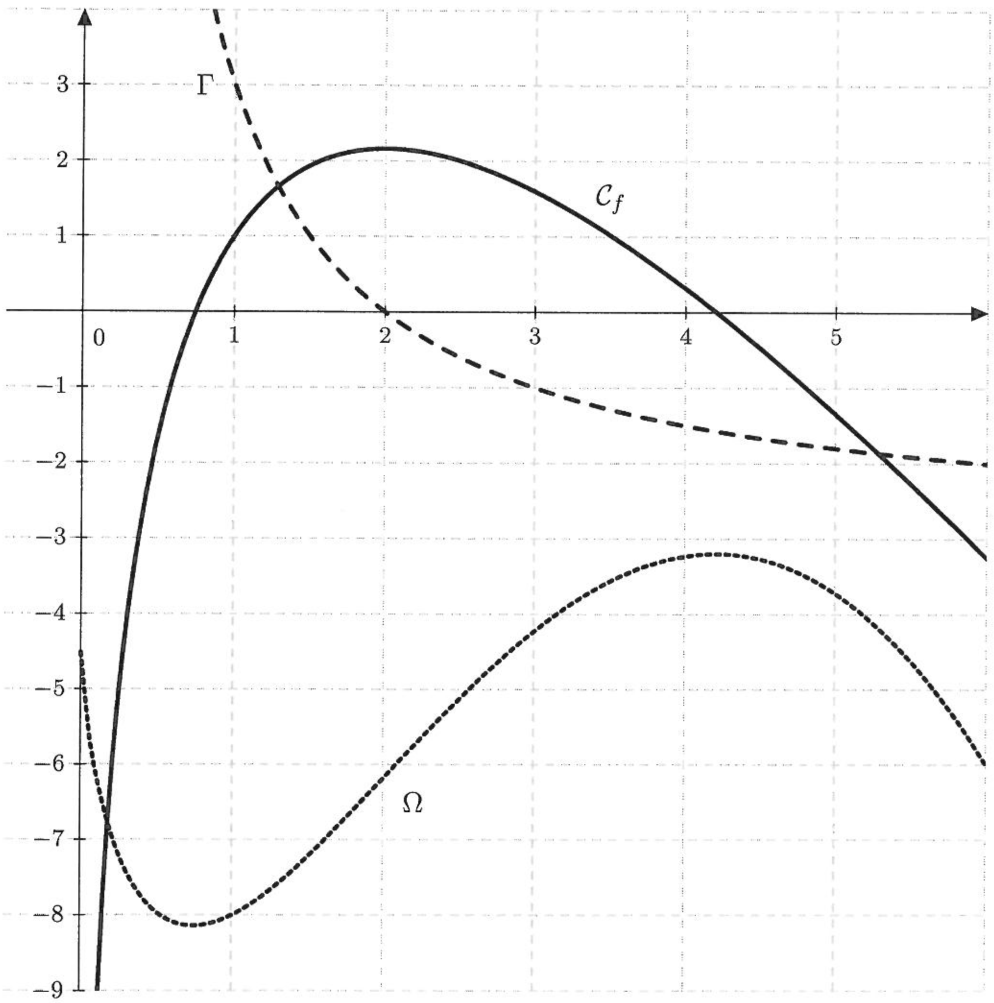
Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6\ln x + ax + b$$

où a et b sont des constantes réelles.
On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Le point $A(1;1)$ appartient à $\mathcal{C}_f$.
$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 2.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathcal{C}_f$ (trait plein) ainsi que les courbes Γ et Ω.
L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f, l'autre représente une primitive F de f.



1. Indiquer laquelle des deux courbes est la représentation graphique de F.
2. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(2)$.
3. Donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de a.
4. À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = 6\ln x - 3x + 4.$$

PARTIE B

Dans cette partie, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec la courbe $\mathcal{C}_f$ fournie dans la partie 1.

1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f('x) = \dfrac{3}{x}(2 - x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner les variations de la fonction f.
4. En déduire que la fonction f admet un extremum dont on calculera la valeur exacte.

PARTIE C

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(x) = 6x\ln x - \frac{3}{2}x^2 - 2x$$

1. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$.
3. Donner une interprétation graphique du nombre I.
4. (a) À l'aide du graphique, donner la valeur de $F(1)$.
   (b) En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.