

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

**Session 2015**

---

**MATHÉMATIQUES – Série ES**

**ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE**

**Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5**

---

**MATHÉMATIQUES – Série L**

**ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

**Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4**

---

## SUJET

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

**Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**

**Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

**Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).**

**Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.**

### EXERCICE 1 - 7 points

Lors d'une opération promotionnelle, un magasin d'électroménager propose deux modèles de téléviseurs : un modèle A et un modèle B.

On s'intéresse aux acheteurs qui profitent de cette promotion.

70% des acheteurs choisissent un téléviseur de modèle A.

Pour ces deux téléviseurs, le magasin propose une extension de garantie de 5 ans.

40 % des acheteurs du téléviseur de modèle A choisissent l'extension de garantie et

50 % des acheteurs du téléviseur de modèle B choisissent cette extension.

On interroge au hasard un acheteur à la sortie du magasin.

*Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.*

*Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.*

On note :

A l'événement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle A » ;

B l'événement « Un acheteur choisit le téléviseur de modèle B » ;

E l'événement « Un acheteur choisit l'extension de garantie ».

On note  $p(A)$  la probabilité de l'événement A.

#### Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un acheteur choisisse le modèle A avec l'extension de garantie.
3. Montrer que  $p(E) = 0,43$ .
4. Un acheteur n'a pas pris l'extension de garantie, calculer la probabilité qu'il ait acheté le modèle A.

#### Partie B

Le directeur du magasin souhaite estimer, parmi tous ses clients, le pourcentage de personnes qui trouvent l'opération promotionnelle intéressante.

Pour cela, il interroge au hasard 210 clients et note que 123 la trouvent intéressante.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % pour la proportion de clients qui trouvent l'opération promotionnelle intéressante.

#### Partie C

Pour sa prochaine promotion, le directeur s'intéresse à l'âge de ses clients. On modélise l'âge des clients en années par une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi normale de moyenne  $\mu = 40$  et d'écart-type  $\sigma = 8$ .

1. Calculer la probabilité qu'un client ait plus de 60 ans.
2. Calculer la probabilité qu'un client ait un âge compris entre 30 et 50 ans.

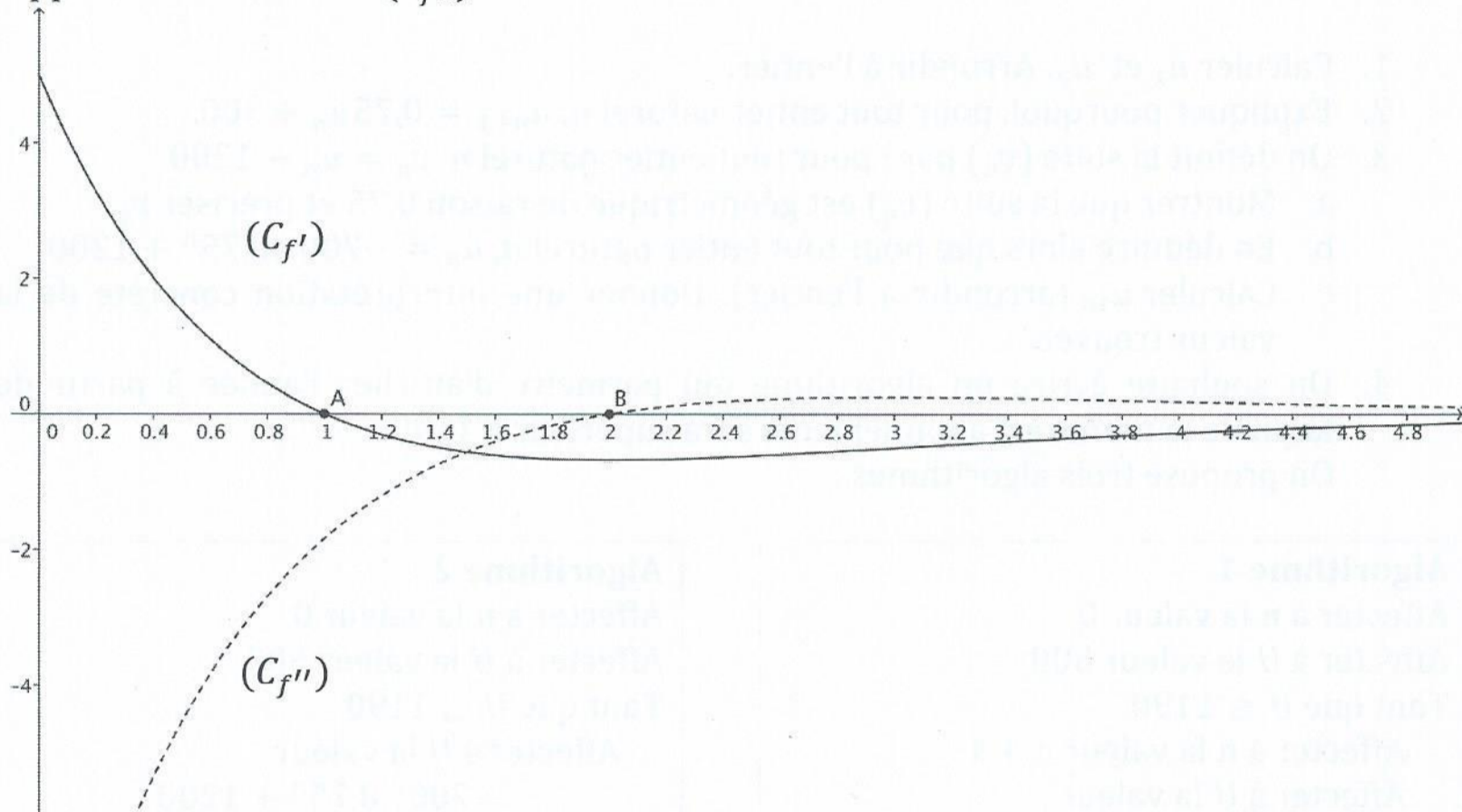
## EXERCICE 2 - 5 points

On considère une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 5]$ .

### Partie A - À l'aide d'un graphique

On a représenté ci-dessous la courbe  $(C_{f'})$  de la fonction dérivée  $f'$  ainsi que la courbe  $(C_{f''})$  de la fonction dérivée seconde  $f''$  sur l'intervalle  $[0 ; 5]$ .

Le point A de coordonnées  $(1 ; 0)$  appartient à  $(C_{f'})$  et le point B de coordonnées  $(2 ; 0)$  appartient à la courbe  $(C_{f''})$ .



1. Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ . Justifier.
2. Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction  $f$  est convexe. Justifier.
3. La courbe de  $f$  admet-elle des points d'inflexion ? Justifier. Si oui, préciser leur(s) abscisse(s).

### Partie B - Étude de la fonction

La fonction  $f$  est définie sur  $[0 ; 5]$  par  $f(x) = 5xe^{-x}$ .

1. Justifier que la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0 ; 5]$ .
2. Montrer que la fonction  $F$  définie sur  $[0 ; 5]$  par  $F(x) = (-5x - 5)e^{-x}$  est une primitive de  $f$  sur  $[0 ; 5]$ .
3. Déterminer alors la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .

### EXERCICE 3 - 5 points

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ses spectacles.

L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  modélise le nombre d'abonnés pour l'année (2014+n).

Pour l'année 2014, il y a 500 abonnés, autrement dit  $u_0 = 500$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . Arrondir à l'entier.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,75u_n + 300$ .
3. On définit la suite  $(v_n)$  par : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 1200$ .
  - a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,75 et préciser  $v_0$ .
  - b. En déduire alors que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = -700 \times 0,75^n + 1200$ .
  - c. Calculer  $u_{10}$  (arrondir à l'entier). Donner une interprétation concrète de la valeur trouvée.
4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1190.  
On propose trois algorithmes :

#### Algorithme 1

```
Affecter à  $n$  la valeur 0
Affecter à  $U$  la valeur 500
Tant que  $U \leq 1190$ 
  Affecter à  $n$  la valeur  $n + 1$ 
  Affecter à  $U$  la valeur
     $-700 \times 0,75^n + 1200$ 
Fin Tant que
Affecter à  $n$  la valeur  $n + 2014$ 
Afficher  $n$ 
```

#### Algorithme 2

```
Affecter à  $n$  la valeur 0
Affecter à  $U$  la valeur 500
Tant que  $U \leq 1190$ 
  Affecter à  $U$  la valeur
     $-700 \times 0,75^n + 1200$ 
  Affecter à  $n$  la valeur  $n + 1$ 
Fin Tant que
Affecter à  $n$  la valeur  $n + 2014$ 
Afficher  $n$ 
```

#### Algorithme 3

```
Affecter à  $n$  la valeur 0
Affecter à  $U$  la valeur 500
Tant que  $U \leq 1190$ 
  Affecter à  $n$  la valeur  $n + 1$ 
  Affecter à  $U$  la valeur
     $-700 \times 0,75^n + 1200$ 
  Affecter à  $n$  la valeur  $n + 2014$ 
Fin Tant que
Afficher  $n$ 
```

Parmi ces trois algorithmes, déterminer lequel convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

#### EXERCICE 4 - 3 points

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x^2 \ln(x)$  sur  $[0,2 ; 10]$  et on note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère du plan.

Le but de cet exercice est de prouver que la courbe  $(C_f)$  admet sur  $[0,2 ; 10]$  une seule tangente passant par l'origine du repère.

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

1. Montrer que pour  $x \in [0,2 ; 10]$ ,  $f'(x) = 2x(2 \ln(x) + 1)$ .
2. Soit  $a$  un réel de  $[0,2 ; 10]$ , montrer que la tangente à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation  $y = 2a(2 \ln(a) + 1)x - 2a^2(\ln(a) + 1)$ .
3. Répondre alors au problème posé.