BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Mercredi 24 Juin 2015

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 – 6 points

Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée de 42% de femmes. 35% des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55% pour les hommes.

Une personne entre dans le magasin. On note :

- F l'événement : « La personne est une femme » ;
- R l'événement : « La personne repart sans rien acheter » ;

Pour tout événement A, on note $\bar{A}$ son événement contraire et $p(A)$ sa probabilité.

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.
Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.
3. Montrer que $p(R) = 0{,}534$.

PARTIE B

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone de type T_1 qu'il vient de s'offrir.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.
2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

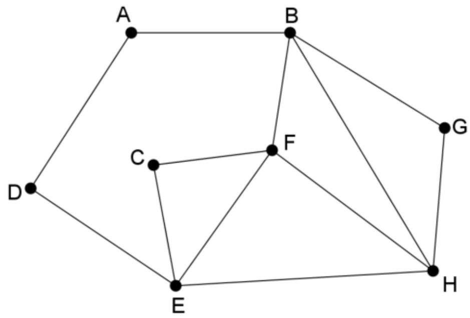
PARTIE C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30% des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur…).
Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1 500.
2. Le service marketing interroge un échantillon de 1 500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires. Doit-on rejeter au seuil de 5% l'hypothèse formulée par le gérant ?

EXERCICE 2 – 5 points

PARTIE A On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
   a. est connexe ;
   b. admet une chaîne eulérienne.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
   On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

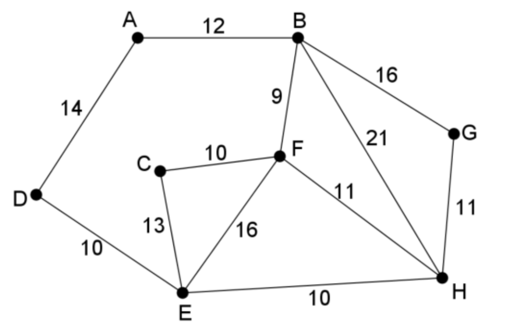
   Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathcal{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :
   a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
   b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

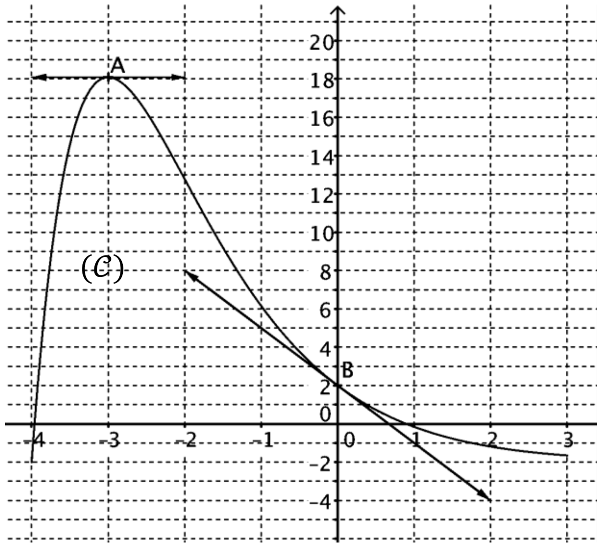
2. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.



Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.
Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

EXERCICE 3 – 6 points

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,3]$. Les points A d'abscisse -3 et B$(0\,;\,2)$ sont sur la courbe $(\mathcal{C})$.
Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f.



Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Par lecture graphique, déterminer :
   a. $f'(-3)$;
   b. $f(0)$ et $f'(0)$.

2. La fonction f est définie sur $[-4\,;\,3]$ par $f(x) = a + (x+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4\,;\,3]$.
   b. À l'aide des questions 1.b. et 2.a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases}$$
   c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4\,;\,3]$ par $f(x) = -2 + (x+4)e^{-x}$.

1. Justifier que, pour tout réel x de $[-4\,;\,3]$, $f'(x) = (-x-3)e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4\,;\,3]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3\,;\,3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

3. On souhaite calculer l'aire S, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=0$.
   a. Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.

b. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

```
1  F(x):=-2x+(-x-5)*exp(-x)
   // Interprète F
   // Succès lors de la compilation F
                                        x  ->-2*x+(-x-5)*exp(-x)
2  derive(F(x))
                                        -exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2
3  simplifier(-exp(-x)-exp(-x)*(-x-5)-2)
                                        x*exp(-x)+4*exp(-x)-2
```

À l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire S puis sa valeur arrondie au centième.

EXERCICE 4 – 3 points

On considère la fonction f définie sur $]0 \,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 3x\ln(x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de C_f par rapport à T ?