BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Partie A

À une roue de loterie dans une fête foraine, la probabilité annoncée de gagner une partie est égale à 0,12. Un joueur a la possibilité de jouer plusieurs parties.

1. Un joueur achète un carnet de tickets permettant de faire quatre parties. La valeur la plus approchée de la probabilité que le joueur gagne une seule fois sur les quatre parties est :

a) $0,3271$ **b)** $0,0002$ **c)** $0,4824$ **d)** $0,1215$

2. Après avoir gagné une partie, le joueur a la possibilité d'emporter son lot ou de le remettre en jeu. La probabilité qu'un joueur emporte son lot sachant qu'il a gagné est 0,8. La valeur la plus approchée de la probabilité qu'il parte avec son lot après une seule partie est :

a) $0,024$ **b)** $0,12$ **c)** $0,096$ **d)** $0,8$

On modélise le nombre de parties jouées par jour à cette loterie par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

3. Une valeur approchée à 10^{-3} près de $\mathrm{P}(140 < X < 160)$ est :

a) $0,954$ **b)** $0,683$ **c)** $0,997$ **d)** $0,841$

Partie B

4. la fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$, a pour expression :

a) $(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$ **b)** $(-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$ **c)** $(2x+3)\mathrm{e}^{-x}$ **d)** $(-2x+1)\mathrm{e}^{-x}$

5. Soit un nombre réel strictement positif a . Parmi ces suites d'inégalités quelle est l'inégalité correcte ?

a) $a < \ln a < \mathrm{e}^a$
b) $\mathrm{e}^a < a < \ln a$
c) $\ln a < \mathrm{e}^a < a$
d) $\ln a < a < \mathrm{e}^a$

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans un plan de lutte contre la pollution urbaine, une municipalité a décidé de réduire l'utilisation des automobiles en ville en instaurant une taxe pour les automobiles circulant dans une zone du centre ville appelée ZTL (Zone à Trafic Limité) et de développer un réseau de navettes.

Partie A

L'objectif affiché par la municipalité est de réduire de moitié la présence des automobiles dans la zone ZTL, dans les deux ans à venir.
Initialement, 40 % des automobiles circulant dans la ville, circulaient dans cette zone ZTL.
Suite à l'instauration de la taxe, l'évolution du trafic dans la ville a été suivie mois après mois.
L'étude a révélé que, parmi les automobiles circulant dans la ville :

∗ 3 % des automobiles circulant dans la zone ZTL n'y circulaient plus le mois suivant.
∗ 0,2 % des automobiles qui ne circulaient pas dans la zone ZTL ont été amenés à y circuler le mois suivant.

On note Z l'état : «l'automobile a circulé dans la zone ZTL au cours du mois» et $\bar{Z}$ l'état : «l'automobile n'a pas circulé dans la zone ZTL au cours du mois».

Pour tout entier naturel n, on note :

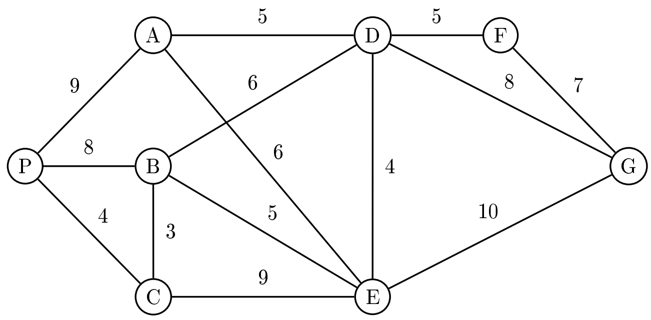
∗ a_n la proportion d'automobiles circulant dans la zone ZTL au cours du n^{ieme} mois ;
∗ b_n la proportion d'automobiles ne circulant pas dans la zone ZTL au cours du n^{ieme} mois ;
∗ $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste après n mois.
On a : $a_n + b_n = 1$ et $P_0 = (0,4 \quad 0,6)$.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets Z et $\bar{Z}$.
2. a. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe (la première colonne concerne Z et la deuxième concerne $\bar{Z}$).
   b. Vérifier que $P_1 = (0,3892 \quad 0,6108)$.
3. L'objectif affiché par la municipalité sera-t-il atteint ?

Partie B

Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.

Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.



1. Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?
2. Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?
3. Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

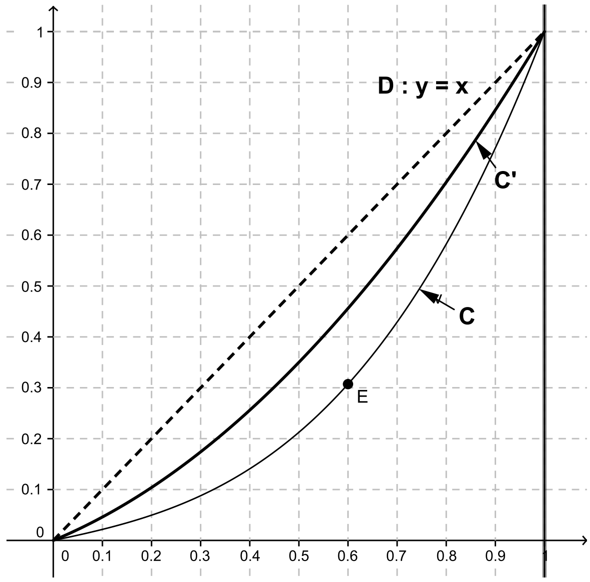
Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.

Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :
$u(x) = 0,6x^2 + 0,4x$ et
$v(x) = 0,7x^3 + 0,1x^2 + 0,2x$

On a tracé ci-contre les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v.



1. Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.

2. Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.

   Exemple : pour la courbe C, le point E(0,60 ; 0,3072) signifie que 60% des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72% de la masse salariale.

   a. Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50% des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.

   b. Pour les 50% des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?

   c. Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?

3. Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) .$$

   a. Montrer que $c_u = 0,2$.

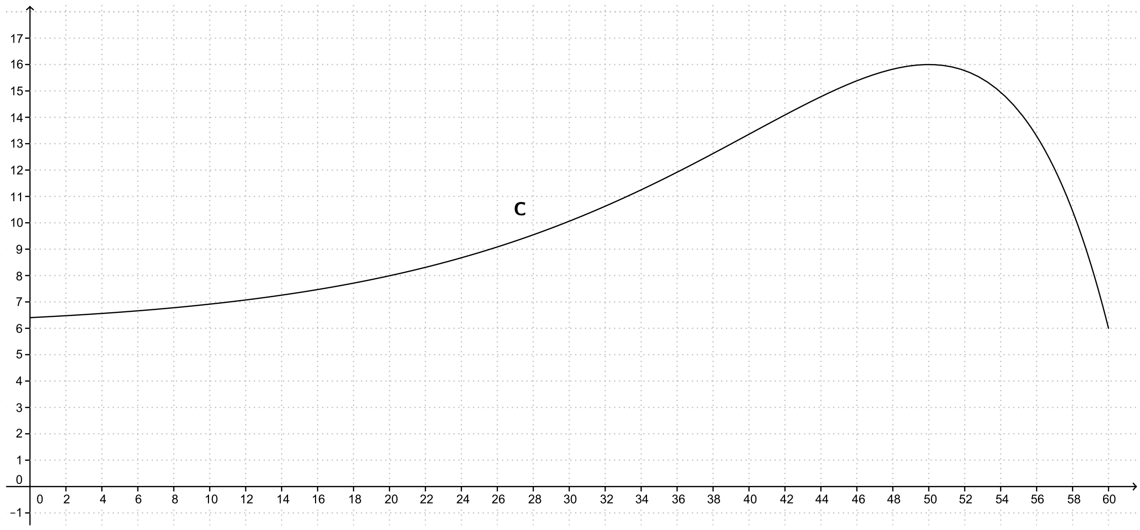
   b. En observant que $\dfrac{c_v}{2} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 v(x)\mathrm{d}x$, donner une interprétation graphique de $\dfrac{c_v}{2}$ en termes d'aires.

   c. En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.

   d. Justifier l'inégalité $c_u \leqslant c_v$.

EXERCICE 4 (5 points) Commun à tous les candidats

On considère une fonction P définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$.
On donne, ci-dessous, la courbe représentative C de la fonction P.



Partie A

À partir d'une lecture graphique répondre aux questions qui suivent :

1. En argumentant la réponse, donner le signe de $P'(54)$, où P' est la fonction dérivée de P.
2. Donner un intervalle sur lequel la fonction P est convexe.
3. Donner, à l'unité près, les solutions de l'équation $P(x) = 10$.
4. On note A le nombre $\int_0^{10} P(x)\mathrm{d}x$; choisir l'encadrement qui convient pour A.

$0 < A < 60$ $\quad$ $60 < A < 70$ $\quad$ $6 < A < 7$ $\quad$ $10 < A < 11$

Partie B

La fonction P est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$ par : $P(x) = 6 + (60 - x)\mathrm{e}^{0,1x-5}$.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel on a obtenu les résultats suivants :

Actions	Résultats
`definir(P(x)=6+(60-x)*exp(0,1*x-5))`	`x ↦ 6+(60-x)*exp(0,1*x-5)`
`deriver(P(x),x)`	`(-0.1*x+5)exp(0.1*x-5)`
`deriver(deriver(P(x),x),x)`	`(-0.01*x+0.4)*exp(0.1*x-5)`

1. **a.** Étudier le signe de $P'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$ où P' est la fonction dérivée de P.
   b. En déduire les variations de la fonction P sur l'intervalle $[0\ ;\ 60]$ et vérifier que la fonction P admet, sur cet intervalle, un maximum valant 16.

2. Montrer que l'équation $P(x) = 10$ a une solution unique x_0 sur l'intervalle $[0\ ;\ 40]$. Donner une valeur approchée de x_0 à 0,1 près.

3. En exploitant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, étudier la convexité de la fonction P.