

Corrigé du bac 2015 : Mathématiques Obligatoire Série S – Métropole

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 22 JUIN 2015

Enseignement Obligatoire *Coefficient : 7*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

Exercice 1 (6 points)

Partie 1

1. a. $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d (\lambda e^{-\lambda x}) dx$

$$P(c \leq X \leq d) = \left[-e^{-\lambda x} \right]_c^d = -e^{-\lambda d} - (-e^{-\lambda c})$$

$$P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

b. $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20)$

$$P(X > 20) = 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{20} = 1 - (e^{-0\lambda} - e^{-20\lambda})$$

$$P(X > 20) = 1 - (1 - e^{-20\lambda}) = 1 - 1 + e^{-20\lambda}$$

$$P(X > 20) = e^{-20\lambda}$$

On veut que $P(X > 20) = 0,05$.

$$P(X > 20) = 0,05 \Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0,05$$

$$\ln(e^{-20\lambda}) = \ln(0,05)$$

$$-20\lambda = \ln(0,05)$$

$$\lambda = \frac{\ln(0,05)}{-20}$$

$$\lambda \approx 0,150$$

c. On sait que $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

Donc $E(x) = \frac{1}{0,150}$

$$E(x) \approx 6,667$$

d. $P(10 \leq X \leq 20) = e^{-10 \times 0,15} - e^{-20 \times 0,15}$

$$P(10 \leq X \leq 20) = e^{-1,5} - e^{-3}$$

$$P(10 \leq X \leq 20) \approx 0,173$$

e. $P(X > 18) = 1 - P(X \leq 20)$

$$P(X > 18) = 1 - (e^{-0 \times 0,15} - e^{-18 \times 0,15})$$

$$P(X > 18) = 1 - (1 - e^{-2,7})$$

$$P(X > 18) = e^{-2,7} \approx 0,067$$

2. a. $P(20 \leq X \leq 21) \approx 0,015$

b. $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = P(Y < 11) + P(Y > 21) - P((Y < 11) \cap (Y > 21))$

$$P((Y < 11) \cup (Y > 21)) \approx 0,01$$

Partie 2

1. X représente la valeur du bon d'achat; R et V représentent la couleur du bon d'achat. $P_R(X \geq 30)$ représente la probabilité d'avoir un bon d'achat de valeur supérieure ou égale à 30€ sachant qu'il est rouge.

$$P_R(X \geq 30) = P_R(X = 30) + P_R(X = 100) = 0,015 + 0,010 = 0,025$$

$$2. P(X \geq 30) = P((X \geq 30) \cap (R)) + P((X \geq 30) \cap (V))$$

$$P(X \geq 30) = P_R(X \geq 30) \times P(R) + P_V(X \geq 30) \times P(V)$$

$$P(X \geq 30) = 0,025 \times 0,25 + 0,067 \times 0,75$$

$$P(X \geq 30) = 0,0565 \approx 0,057$$

$$3. \text{ Nous avons : } n=200 (>30) ; np=200 \times 0,057=11,4 (>5) ; n \times (1-p)=200 \times 0,943=188,6 (>5).$$

Nous pouvons donc appliquer la formule de l'intervalle de fluctuation :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I = \left[0,057 - 1,96 \frac{\sqrt{0,057 \times 0,943}}{\sqrt{200}} ; 0,057 + 1,96 \frac{\sqrt{0,057 \times 0,943}}{\sqrt{200}} \right]$$

$$I \approx [0,0248; 0,0892]$$

(On arrondit les bornes afin de ne pas perdre de valeurs : $0,02486 \rightarrow 0,0248$ et $0,08913 \rightarrow 0,0892$).

Or en réalité 6 clients sur 200 ont reçu un bon d'achat de valeur supérieure ou égale à 30€, ce qui correspond à une fréquence observée de 0,03; $0,03 \in I$, les doutes du directeur ne sont donc pas justifiés (au seuil de 95%).

Exercice 2 (3 points)

$$1. \text{ a. Le vecteur } \overrightarrow{AB} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ -1 - (-1) \\ 5 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ il est donc parallèle à l'axe}$$

(OI) car il a un déplacement nul sur les deux autres axes de l'espace, et se déplace seulement selon l'axe des abscisses.

$$\text{b. La droite (CD) a pour vecteur directeur } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 11 \\ 4 - 0 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ ce vecteur a un}$$

déplacement nul selon l'axe des abscisses et se déplace uniquement selon les axes (OJ) et (OK), donc dans un plan parallèle au plan (OJK).

Comme le plan $\mathcal{P}$ est parallèle à (OJK), tous ses points ont la même abscisse : $x=11$. Le plan $\mathcal{P}$ regroupe tous les points d'abscisse 11, et une équation de $\mathcal{P}$ est $x=11$.

$$\text{c. Le vecteur } \overrightarrow{AE} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \\ z_E - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 0 \\ -1 - (-1) \\ 5 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ il est donc colinéaire au}$$

vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AE} = \frac{11}{2} \overrightarrow{AB}$), les points A, B et E sont donc alignés, donc $E \in (AB)$.

L'équation du plan $\mathcal{P}$ étant $x=11$, et E vérifiant $x=11$, $E \in \mathcal{P}$.

(AB) est parallèle à l'axe (OI) alors que $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (OJK), et comme l'axe (OI) est perpendiculaire au plan (OJK) (repère orthonormé), (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ en un seul et unique point : E.

d. Une équation paramétrique de la droite (AB) est
$$\begin{cases} x = x_A + tx_{\overline{AB}} \\ y = y_A + ty_{\overline{AB}} \\ z = z_A + tz_{\overline{AB}} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = -1 + 0t \\ z = 5 + 0t \end{cases} = \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Une équation paramétrique de la droite (CD) est
$$\begin{cases} x = x_C + t'x_{\overline{CD}} \\ y = y_C + t'y_{\overline{CD}} \\ z = z_C + t'z_{\overline{CD}} \end{cases} = \begin{cases} x = 11 + 0t' \\ y = 0 + 4t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} = \begin{cases} x = 11 \\ y = 4t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases} \text{ avec } t' \in \mathbb{R}.$$

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, alors il existe des points qui vérifient les deux équations à la

fois. Donc
$$\begin{cases} 2t = 11 \\ -1 = 4t' \\ 5 = 1 + 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{2} \\ t' = -\frac{1}{4} \\ t' = \frac{4}{3} \end{cases}.$$
 On trouve deux t' différents, les droites (AB) et (CD) ne sont

donc pas sécantes.

2. a. $M_t N_t = \sqrt{(x_{N_t} - x_{M_t})^2 + (y_{N_t} - y_{M_t})^2 + (z_{N_t} - z_{M_t})^2}$
 $M_t N_t^2 = (x_{N_t} - x_{M_t})^2 + (y_{N_t} - y_{M_t})^2 + (z_{N_t} - z_{M_t})^2$
 $M_t N_t^2 = (11 - t)^2 + (0,8t - (-1))^2 + (1 + 0,6t - 5)^2$
 $M_t N_t^2 = (11^2 - 22t + t^2) + (0,64t^2 + 1,6t + 1^2) + (0,36t^2 - 4,8t + 4^2)$
 $M_t N_t^2 = 121 - 22t + t^2 + 0,64t^2 + 1,6t + 1 + 0,36t^2 - 4,8t + 16$
 $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$

b. L'expression est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, a est positif donc la courbe représentative est d'abord décroissante puis croissante, et admet un minimum en : $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-25,2)}{2 \times 2} = \frac{25,2}{4} = 6,3s$.

La valeur du minimum est $f(6,3) = 2 \times 6,3^2 - 25,2 \times 6,3 + 138$

$$f(6,3) = 58,62$$

Exercice 3 (5 points)

1. $z^2 - 8z + 64 = 0$

L'équation est sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, on peut donc calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = -192$$

Le discriminant est négatif, donc il n'existe pas de solution dans $\mathbb{R}$; on peut trouver des solutions dans $\mathbb{C}$.

Les solutions sont de la forme : $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Ainsi : $z_1 = \frac{8 - i\sqrt{192}}{2} = \frac{8 - 8i\sqrt{3}}{2} = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{8 + i\sqrt{192}}{2} = \frac{8 + 8i\sqrt{3}}{2} = 4 + 4i\sqrt{3}$.

2. a. Module de a : $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $a = x + iy$, donc $|a| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$.
Argument de a : $a = |a|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Or $|a| = 8$ et $a = 4 + 4i\sqrt{3} = |a|(\cos \theta + i \sin \theta) = 8 \times (\frac{4}{8} + \frac{4i\sqrt{3}}{8}) = 8 \times (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2})$.

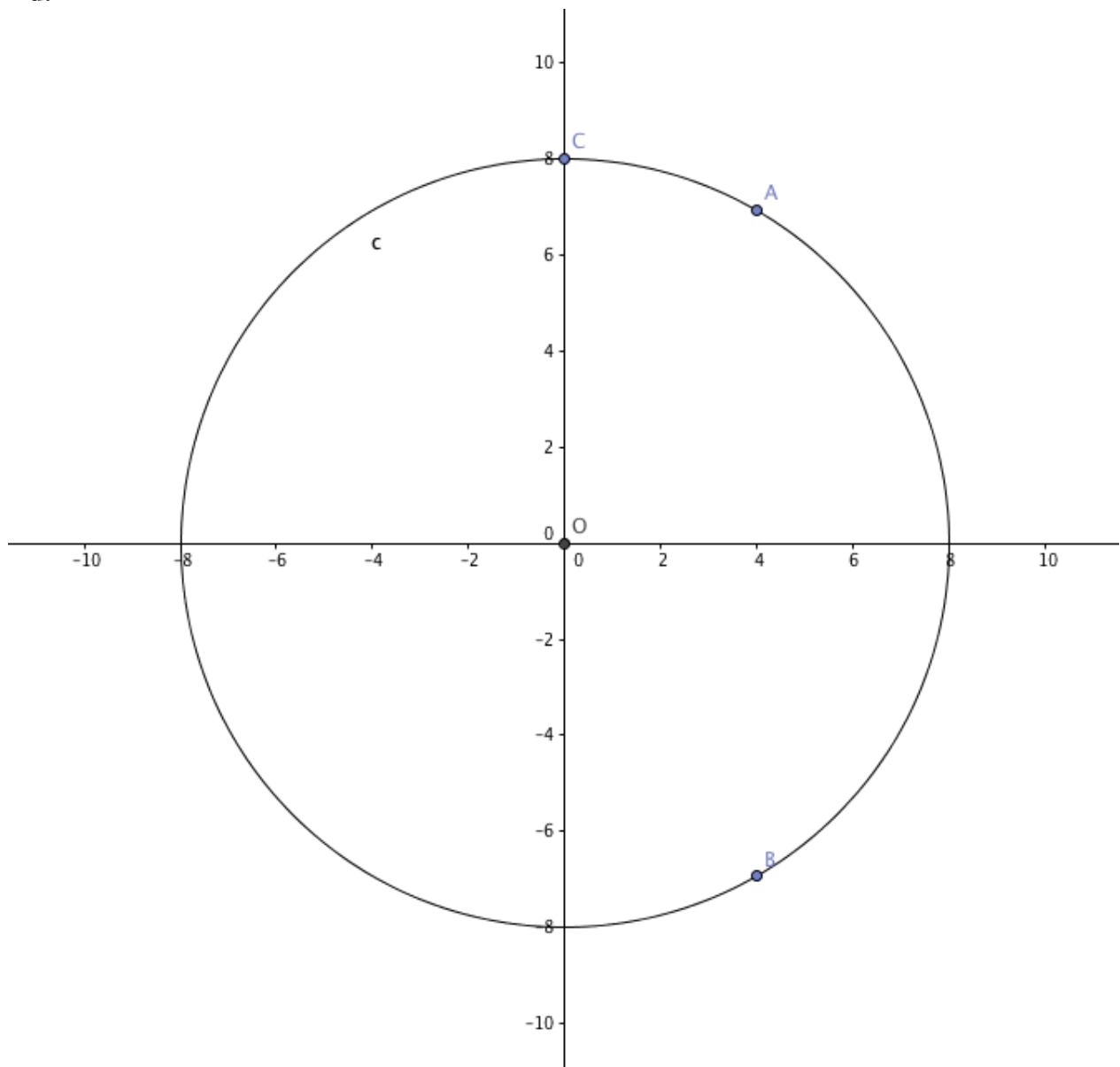
L'angle θ correspondant, ayant pour cosinus $\frac{1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $\frac{\pi}{3}$, donc $\arg(a) = \frac{\pi}{3}$.

b. a peut s'écrire sous la forme exponentielle : $a = |a|e^{i \times \arg(a)}$ donc $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b étant le conjugué de a , il peut s'écrire : $b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c. $|a| = |b| = 8$, et $|c| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$; les points A, B et C sont donc équidistants du point O (centre du repère); ils appartiennent donc au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 8.

d.



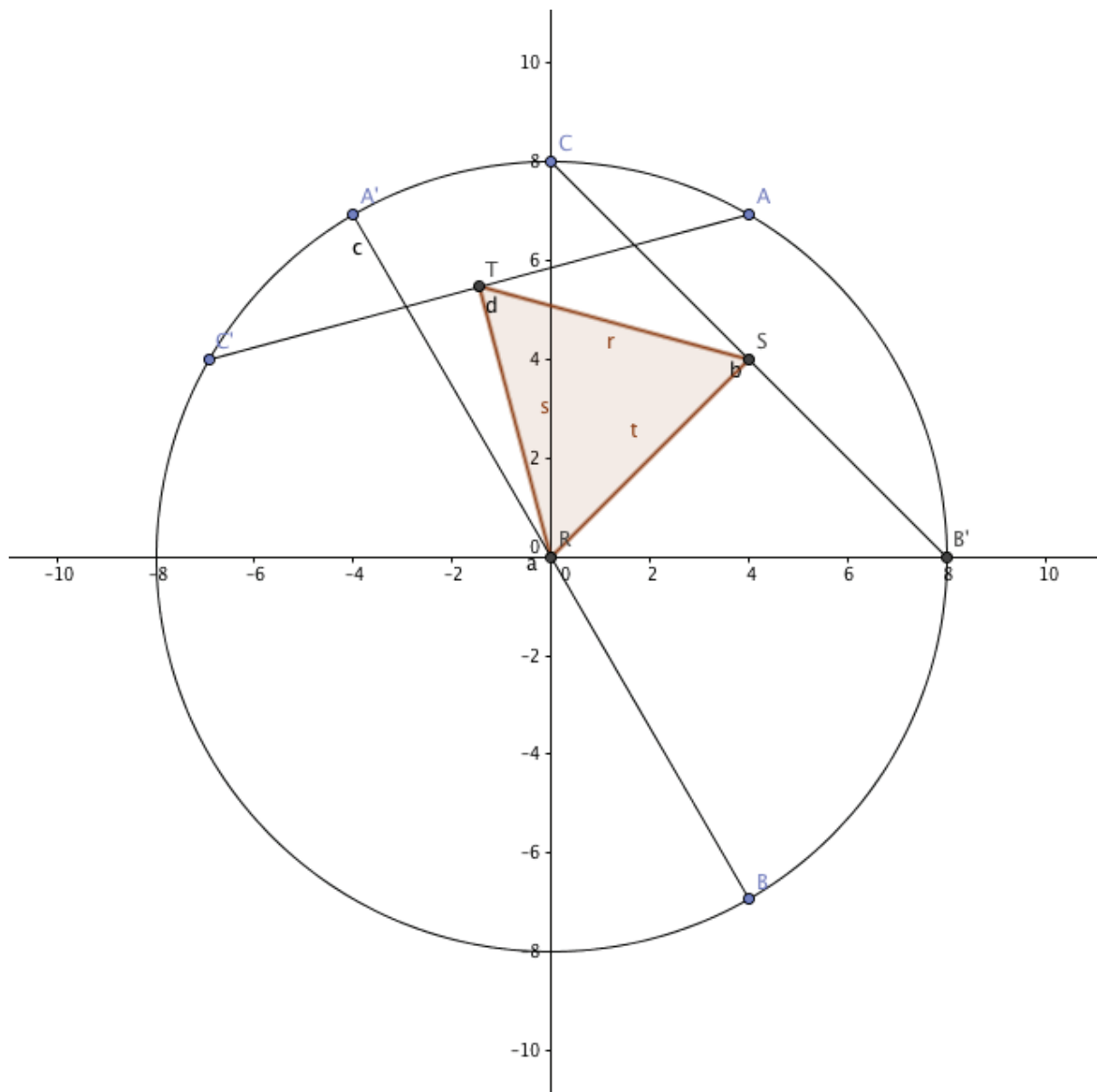
3. a. $b' = be^{\frac{i\pi}{3}} = 8e^{-\frac{i\pi}{3}} \times e^{\frac{i\pi}{3}} = 8e^{-\frac{i\pi}{3} + \frac{i\pi}{3}} = 8e^0 = 8.$

b. $a' = ae^{\frac{i\pi}{3}} = 8e^{\frac{i\pi}{3}} \times e^{\frac{i\pi}{3}} = 8e^{\frac{i\pi}{3} + \frac{i\pi}{3}} = 8e^{\frac{2i\pi}{3}},$ donc $|a'| = 8$ et $\arg(a') = \frac{2\pi}{3}.$

4. a. R est le milieu de $[A'B],$ donc $r = \frac{a'+b}{2} = \frac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2} = 0.$

S est le milieu de $[B'C],$ donc $s = \frac{b'+c}{2} = \frac{8+8i}{2} = 4+4i.$

b.



On peut conjecturer que le triangle RST est un triangle équilatéral.
Pour le prouver, on calcule les longueurs de $[RS], [ST]$ et $[TR].$

$$[RS] = |s - r| = |4 + 4i - 0| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$[ST]=|t-s|=\left|2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})-(4+4i)\right|=\left|-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})\right|=\sqrt{(-2-2\sqrt{3})^2+(-2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$[TR]=|r-t|=\left|0-(2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3}))\right|=\left|-2+2\sqrt{3}-i(2+2\sqrt{3})\right|=\sqrt{(-2+2\sqrt{3})^2+(-2-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$[RS]=[ST]=[TR], \text{ le triangle RST est donc bien équilatéral.}$$

Exercice 4 (6 points)

Partie 1

1. $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$

Soit $u = x+1$ et $v = \ln(x+1)$; $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{x+1}$; on sait que $(uv)' = u'v + uv'$, donc :

$$((x+1)\ln(x+1))' = 1 \times \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} = \ln(x+1) + 1.$$

x	0		$e^2 - 1$		20
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	7	↘	2,61	↗	10,94

Donc $f'(x) = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2$.

2. On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;20]$; pour cela on étudie le signe de la dérivée :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \Leftrightarrow x+1 > e^2 \Leftrightarrow x > e^2 - 1 \simeq 6,39$$

Donc pour $x \in]e^2 - 1; 20]$ f' est positive ; pour $x \in [0; e^2 - 1[$ f' est négative ; f' s'annule en $e^2 - 1$.

On dresse le tableau de variation de la fonction f :

3. Le coefficient de la tangente en 0 est $f'(0)$.

$$f'(0) = \ln(0+1) - 2 = \ln(1) - 2 = -2.$$

4. On sait que la fonction $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$ a pour primitive la fonction g :

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Or $f(x) = g'(x) - 3x + 7$, donc une primitive de f est : $F(x) = g(x) + \int -3x + 7 = g(x) - \frac{3}{2}x^2 + 7x$.

$$\text{Donc } F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x.$$

Partie 2

1. P1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres : VRAI.

Le minimum de la courbe est atteint en l'abscisse $x = e^2 - 1$; le maximum est atteint en 20.

$$f(20) - f(e^2 - 1) = 8,32 \text{ m.}$$

P2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C : VRAI.

Le coefficient directeur de la tangente en B est -2 (cf **Partie 1-3**).

Le coefficient directeur de la tangente en C est $f'(20) = \ln(20+1) - 2 = \ln(21) - 2 = 1,04$.

$$\frac{f'(0)}{f'(20)} = 1,92 \approx 2.$$

2. Calcul de la surface à peindre (somme des aires des faces latérales) :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{OAB'B} + \mathcal{A}_{DD'C'C} + 2\mathcal{A}_{ODCB}$$

$$\mathcal{A}_{OAB'B} = OB \times OA = 7 \times 10 = 70 \text{ m}^2$$

$$\mathcal{A}_{DD'C'C} = CD \times DD' = 10,94 \times 10 = 109,4 \text{ m}^2$$

Pour le calcul de $\mathcal{A}_{ODCB}$, on utilise l'intégrale de la fonction f représentant le profil du module de skateboard.

$$\mathcal{A}_{ODCB} = \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x \right]_0^{20}$$

$$\mathcal{A}_{ODCB} = \frac{1}{2}(21)^2 \ln(21) - \frac{7}{4} \times 20^2 + \frac{13}{2} \times 20 - \left[\frac{1}{2}(1)^2 \ln(1) - \frac{7}{4} \times 0^2 + \frac{13}{2} \times 0 \right]$$

$$\mathcal{A}_{ODCB} = \frac{441}{2} \ln(21) - 700 + 130 - [0]$$

$$\mathcal{A}_{ODCB} = 101,3 \text{ m}^2$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = 70 + 109,4 + 2 \times 101,3 = 382,0 \text{ m}^2.$$

Il faut 1L de peinture pour peindre 5 m^2 : pour calculer le nombre de litres nécessaires, on divise $\mathcal{A}$ par 5.

$V = \frac{382}{5} = 76,4 \text{ L}$, il faut donc 77 litres de peinture au minimum pour peindre les faces latérales du module.

$$3. \text{ a. } B_k B_{k+1} = \sqrt{(x_{B_{k+1}} - x_{B_k})^2 + (y_{B_{k+1}} - y_{B_k})^2}$$

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2}$$

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2} \text{ pour tout entier } k \text{ variant de } 0 \text{ à } 19.$$

b. S prend la valeur 0

Pour k variant de 0 à 19

S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$

Afficher S