

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

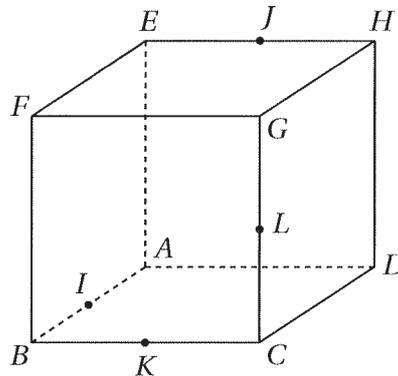
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

1. a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) .
 b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK) .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD) .
3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK) . Déterminer les coordonnées du point M .
4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
5. Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.
6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
 b) En déduire la valeur exacte de u_1 .
3. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ... Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

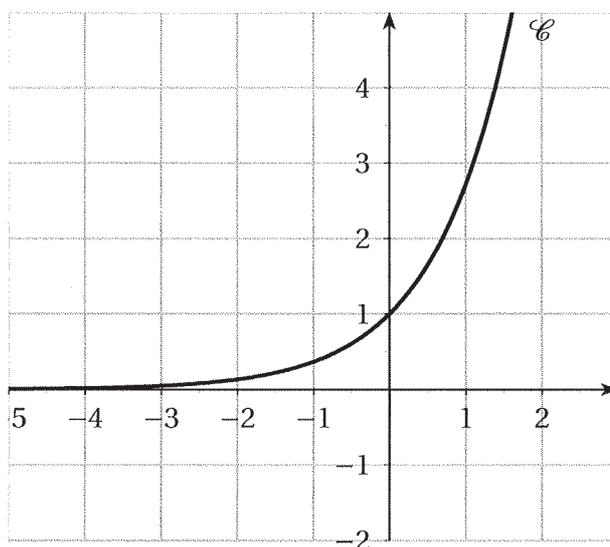
n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.

EXERCICE 3 (3 points)

On considère la courbe \mathcal{C} d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note \mathcal{D}_m la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = e$.
Démontrer que la droite \mathcal{D}_e , d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m , le nombre de points d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D}_m .
3. Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n la probabilité de fumer le n -ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.

On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1 .
2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n) . Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n .

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n , X_n par

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n , $X_n = M^n \times X_0$.

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

- a) Démontrer que $M = A + 0,5B$.
- b) Vérifier que $A^2 = A$, et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

- c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $M^n = A + 0,5^n B$.
- d) En déduire que, pour tout entier naturel n , $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.
- e) À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?