

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

## MATHÉMATIQUES

- Série ES -

### ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

***Durée de l'épreuve : 3 heures***

***Coefficient : 7***

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.  
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le  
texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète  
ou non fructueuse, qu'il aura développée.  
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.*

## EXERCICE 1 (4 points)

*Commun à tous les candidats*

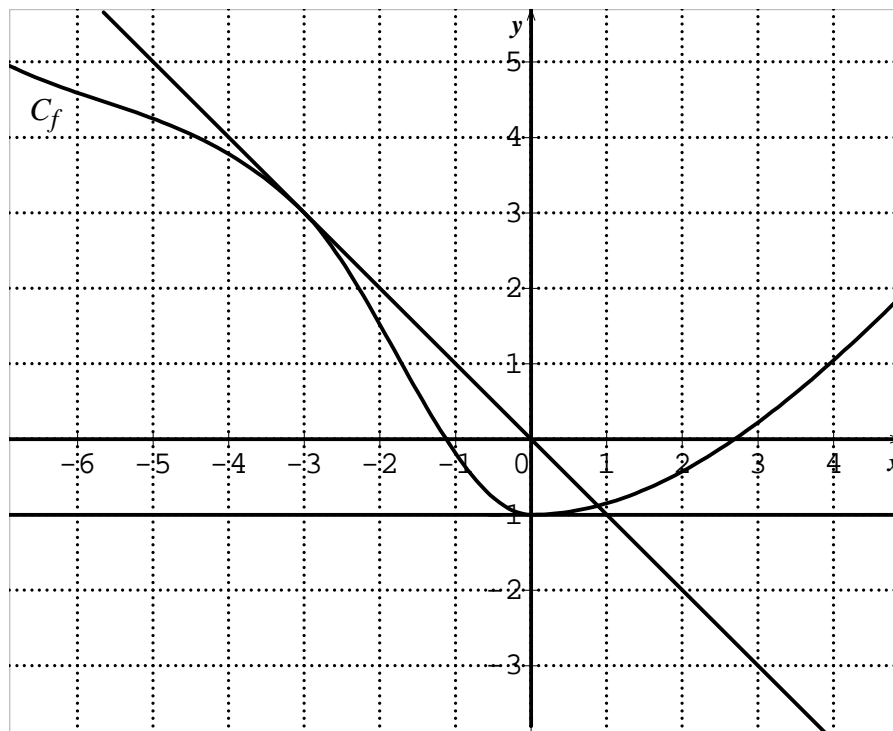
*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*

*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

*Pour chacune des questions posées, une seule des quatre propositions est exacte.*

*Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1) La représentation graphique d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$  est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses  $-3$  et  $0$ .

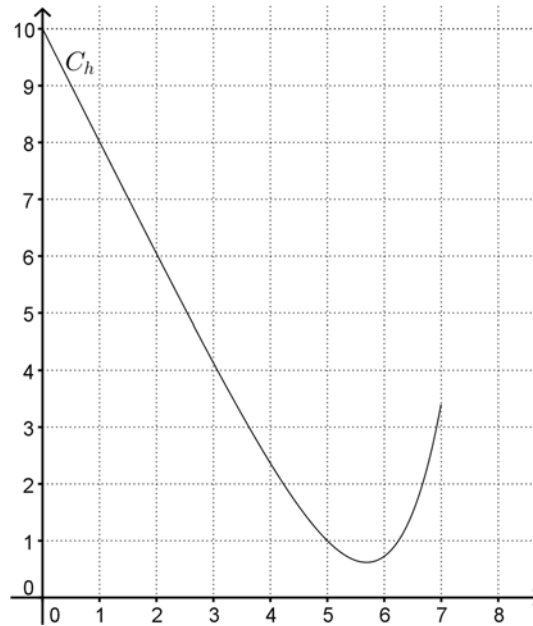


- a)  $f'(0) = -1$     b)  $f'(-1) = 0$     c)  $f'(-3) = -1$     d)  $f'(-3) = 3$

2) On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = (x + 1)\ln(x)$ .

- a)  $g'(x) = \frac{1}{x}$     b)  $g'(x) = 1 + \ln(x)$     c)  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$     d)  $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x)$

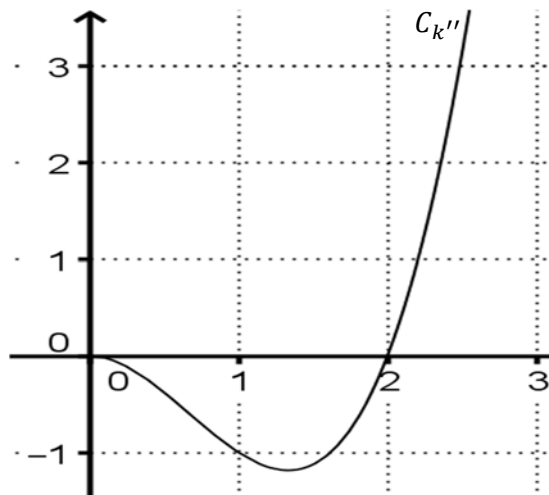
3) On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0 ; 7]$  et représentée par la courbe ci-dessous :



a)  $\int_0^5 h(x)dx = h(5) - h(0)$       b)  $20 < \int_0^5 h(x)dx < 30$

c)  $15 < \int_0^5 h(x)dx < 20$       d)  $\int_0^5 h(x)dx = 20$

4) On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde  $k''$  d'une fonction  $k$  définie sur  $[0 ; +\infty[$ .



a)  $k$  est concave sur l'intervalle  $[1 ; 2]$ .      b)  $k$  est convexe sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ .

c)  $k$  est convexe sur  $[0 ; +\infty[$ .      d)  $k$  est concave sur  $[0 ; +\infty[$ .

## EXERCICE 2 (5 points)

*Commun à tous les candidats*

*Les parties A et B sont indépendantes*

### Partie A

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.

Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.

On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux événements suivants :

- C : « le jeune choisi est un collégien » ;
- L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
- T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

*Rappel des notations*

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements,  $p(A)$  désigne la probabilité que l'événement  $A$  se réalise et  $p_B(A)$  désigne la probabilité de  $A$  sachant que l'événement  $B$  est réalisé. On note aussi  $\bar{A}$  l'événement contraire de  $A$ .

- 1) Donner les probabilités :  $p(C)$ ,  $p(L)$ ,  $p(T)$ ,  $p_C(T)$ .
- 2) Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.
- 3) Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
- 4) Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
- 5) a) Calculer  $p(T \cap L)$ , en déduire  $p_L(T)$ .  
b) Compléter l'arbre construit dans la question 2).

### Partie B

En 2012 en France, selon une étude publiée par l'Arcep (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes), les adolescents envoyaient en moyenne 83 SMS (messages textes) par jour, soit environ 2500 par mois. On admet qu'en France le nombre de SMS envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale d'espérance  $\mu = 2\,500$  et d'écart-type  $\sigma = 650$ .

*Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les probabilités arrondies au millième.*

- 1) Calculer la probabilité qu'un adolescent envoie entre 2 000 et 3 000 SMS par mois.
- 2) Calculer  $p(X \geq 4\,000)$ .
- 3) Sachant que  $p(X \leq a) = 0,8$ , déterminer la valeur de  $a$ . On arrondira le résultat à l'unité. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

### EXERCICE 3 (5 points)

#### *Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité*

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.

On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.

Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ;
- 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'événement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'événement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel  $n$  :

- $c_n$  la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année  $2015 + n$  ;
- $l_n$  la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année  $2015 + n$ .

On note  $P_n = (c_n \ l_n)$  la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année  $2015 + n$ .

Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

#### **Partie A**

1) Dessiner le graphe probabiliste représentant cette situation et donner la matrice de transition associée au graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre C et L.

2) a) Montrer que l'état stable de ce graphe est  $P = (0,375 \ 0,625)$ .

b) Déterminer, en justifiant, si l'entreprise PiscinePlus peut espérer atteindre son objectif.

#### **Partie B**

En 2015, on sait que 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On a ainsi  $P_0 = (0,15 \ 0,85)$ .

1) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $c_{n+1} = 0,68 c_n + 0,12$ .

2) À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	$n$ est un nombre entier naturel
L2		$C$ est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à $n$ la valeur 0
L4		Affecter à $C$ la valeur 0,15
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		$n$ prend la valeur $n + 1$
L7		$C$ prend la valeur $0,68 C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher $n$

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats au millième.

Valeur de $n$	0		
Valeur de $C$	0,15		

b) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3) On rappelle que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $c_{n+1} = 0,68 c_n + 0,12$  et que  $c_0 = 0,15$ .  
On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = c_n - 0,375$ .

a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

On admet que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$ .

b) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $c_n \geq 0,35$ .

c) Quel résultat de la question 2) retrouve-t-on ?

## EXERCICE 4 (6 points)

*Commun à tous les candidats*

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[3 ; 13]$  par :  $f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$ .

### Partie A : Étude de la fonction $f$

1) Montrer que la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , définie pour tout  $x$  de l'intervalle  $[3 ; 13]$ , a pour expression :

$$f'(x) = 2(-1 + e^{-2x+10}).$$

2) a) Résoudre dans l'intervalle  $[3 ; 13]$  l'inéquation :  $f'(x) \geq 0$ .

b) En déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[3 ; 13]$  et dresser le tableau de variations de  $f$  sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à  $10^{-3}$ .

c) Calculer l'intégrale  $\int_3^{13} f(x)dx$ . On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

### Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de  $x$  centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle  $[3 ; 13]$  par la fonction  $f$ .

En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.

2) Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

### Partie C : Rentabilité

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.

Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.