Corrigé du bac 2016 : Mathématiques Obligatoire Série S – Métropole

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Obligatoire *Coefficient : 7*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1

Partie A

Traduisons tout d'abord les données du texte. La chaîne A produit 40% des composants, donc la chaîne B en produit 60%. La probabilité de choisir un composant issu de la chaîne A se note P(A) et vaut 0,4 – celle de choisir un composant issu de la chaîne B se note P(B) et vaut 0,6.

En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%, ce qui se traduit en notations probabilistes : $P_A(S)$= 1 - 0,20 = 0,80 et $P_B(S)$= 1 - 0,05 = 0,95.

Remarque : Faire attention ici car S représente l'événement « le composant est **SANS** défaut ». $P_A(S)$ veut donc dire « la probabilité que le composant est sans défaut sachant qu'il provient de la chaîne A », or 20% représente la proportion de composants issus de la chaîne A **AVEC** un défaut.

1) En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

P(S) = $P(A)*P_A(S) + P(B)*P_B(S)$ = 0,4 * 0,8 + 0,6* 0,95 = **0,89**

2) Probabilité que le composant provienne de la chaîne A sachant qu'il ne possède pas de défaut :

$$P_s(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)}$$

Or $P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap \bar{S})$ d'où on en déduit

$$P(A \cap S) = P(A) - P(A \cap \bar{S}) = P(A) - P_A(\bar{S}) * P(A) = P(A) * \left(1 - P_A(\bar{S})\right) = 0{,}4 * (1 - 0{,}2) = 0{,}32$$

Donc $\boldsymbol{P_s(A)} = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}32}{0{,}89} = \mathbf{0{,}36}$

Partie B

1) En vérifiant les hypothèses du théorème de l'intervalle de confiance à 95%, à savoir :

- $n \geq 30$; ici n = 400 donc OK
- $nf \geq 5$; ici nf = 368 donc OK
- $n(1 - f) \geq 5$; ici $n(1 - f)$ = 32 donc OK

On peut appliquer la formule qui nous donne l'intervalle de confiance.

L'intervalle de confiance est défini tel que : $I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec f la fréquence observée de composants sans défaut et n le nombre d'échantillons étudiés. On obtient alors :

$I = [0{,}92 - \frac{1}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}92 + \frac{1}{\sqrt{400}}]$ c'est-à-dire $\boldsymbol{I} = [\mathbf{0{,}87}\ ;\ \mathbf{0{,}97}]$.

2) L'amplitude étant la longueur de l'intervalle de confiance I calculé juste avant, si on veut trouver le nombre d'échantillons pour lequel cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,02 on doit alors résoudre l'inégalité suivante : $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ ce qui nous donne $\boldsymbol{n \geq 10\,000}$.

Partie C

1.a) $P(T \leq a)$ représente l'aire sous la courbe du graphique, c'est-à-dire entre les abscisses x=0 et x=a.

1.b) t étant positif, on peut se servir de la définition donnée à la question précédente et écrire :

$$\boldsymbol{P(T \leq t)} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = [-\frac{1}{\lambda} * \lambda e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = \boldsymbol{1 - e^{-\lambda t}}$$

1.c) Calculons $\lim_{t \to +\infty} P(T \leq t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\boldsymbol{1 - e^{-\lambda t}}\right)$

Or $\lim_{t \to +\infty} -\lambda t = -\infty$ et $\lim_{X \to -\infty} (\boldsymbol{e^{X}}) = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} \left(\boldsymbol{e^{-\lambda t}}\right) = 0$

Ainsi, $\boldsymbol{\lim_{t \to +\infty} P(T \leq t)} = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - 0 = \boldsymbol{1}$

2) On suppose que $P(T \leq 7) = 0{,}5$ donc $1 - e^{-7\lambda} = 0{,}5$ puis $e^{-7\lambda} = 0{,}5$

Enfin, $-7\lambda = \ln(0{,}5)$ et $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}5)}{7} \approx \boldsymbol{0{,}099}$

3.a) T étant la variable aléatoire propre à la durée de vie du composant, on doit alors calculer $P(T \geq 5)$ pour avoir la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans. Avec λ=0,099, on a : $\boldsymbol{P(T \geq 5)} = 1 - P(T \leq 5) = e^{-0{,}099 \times 5} = \boldsymbol{0{,}61.}$

3.b) On nous demande, parmi les composants qui fonctionnent encore au bout de 2 ans, quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans. On veut alors calculer $P_{T \geq 2}(T \geq 7)$.

Or, si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h : $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$. $P_{T \geq 2}(T \geq 7) = P_{T \geq 2}(T \geq 2 + 5) = P(T \geq 5)$

D'après la question 3.a), $\boldsymbol{P_{T \geq 2}(T \geq 7)} = \boldsymbol{0{,}61.}$

3.c) L'espérance mathématique E(T) qui suit une loi exponentielle de paramètre λ s'exprime telle que : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ d'où $\boldsymbol{E(T)} = \frac{1}{0{,}099} \approx \boldsymbol{10.}$

Cela signifie que la durée moyenne de vie d'un composant est de 10 ans.

EXERCICE 2

Affirmation 1 : Les trois points A, B et C sont alignés.

Calculons pour cela les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple. On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1=2 \\ 0-2=-2 \\ 1-3=-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-3=-4 \\ 0-0=0 \\ 1-1=0 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs calculés ne sont pas colinéaires (aucune relation de proportionnalité ne peut être trouvée entre ces deux vecteurs) donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est **fausse**.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Effectuons le produit scalaire du vecteur $\vec{n}$ à deux vecteurs non colinéaires du plan ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple) :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2*0+(-2)*1+(-2)*(-1) = -2+2 = 0$$
$$\overrightarrow{BC}.\vec{n} = (-4)*0+0*1+0*(-1) = 0$$

Les produits scalaires sont nuls : le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est **vraie**.

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu M du segment [BC].

Le point M est situé en (1, 0, 1). Etant le milieu du segment [BC], il appartient forcément au plan (ABC).

Si la droite (EF) coupe le plan (ABC) en ce point, cela veut dire que les points E, F et M sont alignés. On le vérifie en étudiant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ par exemple :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EM}$. Ainsi, M∈(ABC) et M∈(EF).

Donc l'affirmation 3 est **vraie**.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Ecrivons les équations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

$(AB): \begin{cases} 1+2t \\ 2-2t \\ 3-2t \end{cases}$ et $(CD): \begin{cases} 1-3u \\ u \\ 1-2u \end{cases}$

Si elles sont sécantes, nous devrions trouver un couple (t, u) caractéristique du point de rencontre des deux droites. On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases} 1+2t = 1-3u \\ 2-2t = u \\ 3-2t = 1-2u \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2t = -3u \\ u = 2-2t \ (2) \\ 2-2t = 2u \ \ (3) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) sont contradictoires ; il n'existe pas de solution à ce système d'équation. L'affirmation 4 est donc **fausse**.

EXERCICE 3

Partie A

1) Soit $f(x) = x - \ln(x^2+1)$

$f(x) = x \leftrightarrow x - \ln(x^2+1) = x \leftrightarrow ln(x^2+1) = 0 \leftrightarrow x^2+1 = e^0 = 1 \leftrightarrow \boldsymbol{x = 0}$.

2)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
f	$-\infty$		↗		$+\infty$

Calculons la derivée de la fontion *f(x)* : $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$ dans $\mathbb{R}$.

La dérivée *f'(x)* étant positive sur]- ∞ ; +∞[, la fonction *f(x)* est alors croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x - \ln(x^2+1)]$

or $\lim_{x\to-\infty} (x^2+1) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [x - \ln(x^2+1)] = -\infty$

3) Calculons *f(0)* et *f(1)* :

$f(0) = 0 - \ln(0+1) = \ln(1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(1+1) = 1 - \ln(2) \approx 0{,}31$

La fonction *f* étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ses valeurs sont comprises entre 0 et 1 sur l'intervalle [0, 1].

4.a) L'algorithme étudié retourne le plus petit entier N respectant la condition *f(N) ≥ A*.

4.b) A l'aide de la calculatrice, on trouve *f(109)*$\approx$ 99,62 < *100* et *f(110)* $\approx$ 100,60 > *100*. Dans ce cas, pour A = 100, **N = 110**.

Partie B

$u_{n+1} = u_n - \ln({u_n}^2 + 1)$

1) Notons *(P_n)* : $u_n \in [0 ; 1]$ la propriété étudiée.

Initialisation : Pour *n = 0*, $u_0 = 1 \in [0 ;\ 1]$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose *(P_n)* vraie.
$u_{n+1} = u_n - \ln({u_n}^2 + 1) = f(u_n)$

D'après la question 3) de la partie A, pour tout $x \in [0 ;\ 1]$, $f(x) \in [0 ;\ 1]$. Ainsi, par analogie avec les suites, $u_n \in [0 ; 1]$ implique que $f(u_n) \in [0 ; 1]$, donc $\boldsymbol{u_{n+1}} \in [\mathbf{0} ;\ \mathbf{1}]$: *(P_{n+1})* est vraie.

On a ainsi démontré la propriété au rang n + 1.

De ce fait, la propriété (P_n) est vraie quel que soit n.

2) Pour étudier les variations de la suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$ or $u_n^2 + 1 \geq 1$ puis en appliquant la fonction logarithme népérien ln à l'inégalité (fonction croissante sur $\mathbb{R}$) :

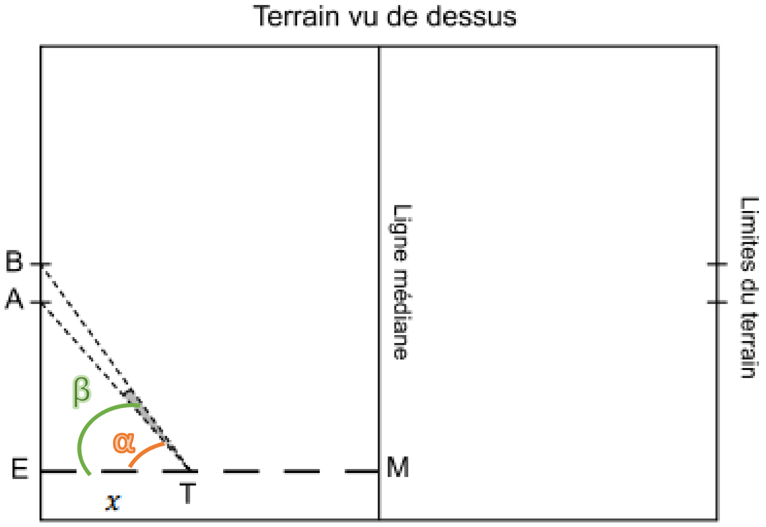
$\ln(u_n^2 + 1) \geq 0$ d'où $-\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$

Le résultat de la différence est négatif quel que soit n, donc la suite (u_n) est décroissante.

3) D'après la question 1), on sait que tous les termes de la suite (u_n) sont compris entre 0 et 1 ; la suite est donc minorée par 0. D'après la question 2) on sait que la suite est également décroissante.
La suite (u_n) converge alors vers une limite *l*.

4) En admettant que *l* vérifie l'égalité *f(l) = l*, on en déduit que **l = 0** car nous avons vu dans la question 1) que la seule solution à l'égalité *f(x) = x* se trouvait en x = 0.

EXERCICE 4



1) Exprimons tan α :

$$\tan \alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}$$

Puis tan β :

$$\tan \beta = \frac{EB}{ET} = \frac{25 + 5{,}6}{x} = \frac{30{,}6}{x}$$

2) Notons $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ et étudions le signe de sa dérivée, ce qui est possible car *f(x)* est dérivable sur]0 ; π/2[comme quotient de fonctions dérivables :

$f'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ sur]0 ; π/2[. La dérivée de la fonction tangente étant strictement positive sur cet intervalle, la fonction tangente est donc strictement croissante sur]0 ; π/2[.

3) Sur la figure, et d'après la relation de Chasles, on déduit que γ = β – α.

Les angles α et β appartiennent bien à l'intervalle]0 ; π/2[, par conséquent leur différence aussi. On peut donc exprimer tan γ pour x ∈]0 ; 50] :

$$\tan \gamma = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + tan\alpha \tan \beta} = \frac{\frac{30{,}6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30{,}6}{x} * \frac{25}{x}} = \frac{\frac{5{,}6}{x}}{\frac{x^2 + 765}{x^2}} = \frac{5{,}6x}{x^2 + 765}$$

4) La fonction tangente étant strictement croissante sur l'intervalle d'étude]0 ; π/2[, l'angle γ est maximal quand $\frac{5{,}6x}{x^2+765} = \frac{5{,}6}{x+\frac{765}{x}}$ l'est, donc lorsque $x + \frac{765}{x}$ est minimal.

Soit $g(x) = x + \frac{765}{x}$. Cette fonction est dérivable sur]0 ; 50] comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

On calcule sa dérivée : $(g(x))' = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2}$ on en déduit que son signe dépend de celui du numérateur, car le dénominateur est toujours positif.

En résolvant $x^2 - 765 = 0$ on trouve $x = \pm\sqrt{765}$. On peut maintenant poser le tableau pour l'étude du sens de variation de la fonction *g(x)* :

x	0		$\sqrt{765}$		50
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)		↘	55,32	↗	

Le minimum de la fonction *g(x)* correspond au maximum de $\tan\gamma$ (composition de la fonction inverse, strictement décroissante sur l'intervalle d'étude, avec *g(x)*).

Ainsi, $\tan\gamma$ est maximal pour $x = \sqrt{765}$. On mesure ensuite l'angle correspondant à cette mesure : $\tan\gamma = \frac{5{,}6 * \sqrt{765}}{765+765}$ puis $\boldsymbol{\gamma} = Arctan\left(\frac{5{,}6 * \sqrt{765}}{765+765}\right) = Arctan\left(\frac{5{,}6 * \sqrt{765}}{765+765}\right) \approx \boldsymbol{0{,}10\ rad}$