Corrigé du bac 2016 : Mathématiques Spécialité Série S – Métropole

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Spécialité *Coefficient : 9*

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1

Partie A

Traduisons tout d'abord les données du texte. La chaîne A produit 40% des composants, donc la chaîne B en produit 60%. La probabilité de choisir un composant issu de la chaîne A se note P(A) et vaut 0,4 – celle de choisir un composant issu de la chaîne B se note P(B) et vaut 0,6.

En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%, ce qui se traduit en notations probabilistes : $P_A(S)= 1 - 0{,}20 = 0{,}80$ et $P_B(S)= 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Remarque : Faire attention ici car S représente l'événement « le composant est **SANS** défaut ». $P_A(S)$ veut donc dire « la probabilité que le composant est sans défaut sachant qu'il provient de la chaîne A », or 20% représente la proportion de composants issus de la chaîne A **AVEC** un défaut.

1) En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient :

$\mathbf{P(S)} = P(A)*P_A(S) + P(B)*P_B(S) = 0{,}4 * 0{,}8 + 0{,}6* 0{,}95 = \mathbf{0{,}89}$

2) Probabilité que le composant provienne de la chaîne A sachant qu'il ne possède pas de défaut :

$$P_s(A) = \frac{P(A\cap S)}{P(S)}$$

Or $P(A) = P(A \cap S) + P(A \cap \bar{S})$ d'où on en déduit

$$P(A \cap S) = P(A) - P(A \cap \bar{S}) = P(A) - P_A(\bar{S}) * P(A) = P(A) * \left(1 - P_A(\bar{S})\right) = 0{,}4 * (1 - 0{,}2) = 0{,}32$$

Donc $\boldsymbol{P_s(A)} = \frac{P(A\cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}32}{0{,}89} = \mathbf{0{,}36}$

Partie B

1) En vérifiant les hypothèses du théorème de l'intervalle de confiance à 95%, à savoir :

- $n \geq 30$; ici n = 400 donc OK
- $nf \geq 5$; ici $nf = 368$ donc OK
- $n(1 - f) \geq 5$; ici $n(1 - f) = 32$ donc OK

On peut appliquer la formule qui nous donne l'intervalle de confiance.

L'intervalle de confiance est défini tel que : $I = [f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec f la fréquence observée de composants sans défaut et n le nombre d'échantillons étudiés. On obtient alors :

$I = [0{,}92 - \frac{1}{\sqrt{400}} \; ; \; 0{,}92 + \frac{1}{\sqrt{400}}]$ c'est-à-dire $\boldsymbol{I} = [\mathbf{0{,}87} \; ; \; \mathbf{0{,}97}]$.

2) L'amplitude étant la longueur de l'intervalle de confiance I calculé juste avant, si on veut trouver le nombre d'échantillons pour lequel cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,02 on doit alors résoudre l'inégalité suivante : $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ ce qui nous donne $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{10\,000}$.

Partie C

1.a) $P(T \leq a)$ représente l'aire sous la courbe du graphique, c'est-à-dire entre les abscisses x=0 et x=a.

1.b) t étant positif, on peut se servir de la définition donnée à la question précédente et écrire :

$$\boldsymbol{P(T \leq t)} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-\frac{1}{\lambda} * \lambda e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-1) = \mathbf{1} - \boldsymbol{e^{-\lambda t}}$$

1.c) Calculons $\lim\limits_{t\to+\infty} P(T \leq t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\mathbf{1} - \boldsymbol{e^{-\lambda t}}\right)$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} -\lambda t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} (\boldsymbol{e^{X}}) = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\boldsymbol{e^{-\lambda t}}\right) = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{\boldsymbol{t\to+\infty}} \boldsymbol{P(T \leq t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = 1 - 0 = \mathbf{1}$

2) On suppose que $P(T \leq 7) = 0{,}5$ donc $1 - e^{-7\lambda} = 0{,}5$ puis $e^{-7\lambda} = 0{,}5$

Enfin, $-7\lambda = \ln(0{,}5)$ et $\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\ln(0{,}5)}{7} \approx \mathbf{0{,}099}$

3.a) T étant la variable aléatoire propre à la durée de vie du composant, on doit alors calculer $P(T \geq 5)$ pour avoir la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans. Avec λ=0,099, on a : $\boldsymbol{P(T \geq 5)} = 1 - P(T \leq 5) = e^{-0{,}099\times 5} = \mathbf{0{,}61.}$

3.b) On nous demande, parmi les composants qui fonctionnent encore au bout de 2 ans, quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans. On veut alors calculer $P_{T\geq 2}(T \geq 7)$.

Or, si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h : $P_{X\geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$. $P_{T\geq 2}(T \geq 7) = P_{T\geq 2}(T \geq 2 + 5) = P(T \geq 5)$

D'après la question 3.a), $\boldsymbol{P_{T\geq 2}(T \geq 7)} = \mathbf{0{,}61.}$

3.c) L'espérance mathématique E(T) qui suit une loi exponentielle de paramètre λ s'exprime telle que : $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ d'où $\boldsymbol{E(T)} = \frac{1}{0{,}099} \approx \mathbf{10.}$

Cela signifie que la durée moyenne de vie d'un composant est de 10 ans.

EXERCICE 2

Affirmation 1 : Les trois points A, B et C sont alignés.

Calculons pour cela les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple. On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-1=2 \\ 0-2=-2 \\ 1-3=-2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-3=-4 \\ 0-0=0 \\ 1-1=0 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs calculés ne sont pas colinéaires (aucune relation de proportionnalité ne peut être trouvée entre ces deux vecteurs) donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est **fausse**.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Effectuons le produit scalaire du vecteur $\vec{n}$ à deux vecteurs non colinéaires du plan ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ par exemple) :

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2*0+(-2)*1+(-2)*(-1) = -2+2 = 0$$
$$\overrightarrow{BC}.\vec{n} = (-4)*0+0*1+0*(-1) = 0$$

Les produits scalaires sont nuls : le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (ABC).

L'affirmation 2 est **vraie**.

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu M du segment [BC].

Le point M est situé en (1, 0, 1). Etant le milieu du segment [BC], il appartient forcément au plan (ABC).

Si la droite (EF) coupe le plan (ABC) en ce point, cela veut dire que les points E, F et M sont alignés. On le vérifie en étudiant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ par exemple :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont colinéaires car $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EM}$. Ainsi, M∈(ABC) et M∈(EF).

Donc l'affirmation 3 est **vraie**.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Ecrivons les équations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

$(AB)\colon\begin{cases}1+2t\\2-2t\\3-2t\end{cases}$ et $(CD)\colon\begin{cases}1-3u\\u\\1-2u\end{cases}$

Si elles sont sécantes, nous devrions trouver un couple (t, u) caractéristique du point de rencontre des deux droites. On résout alors le système suivant :

$$\begin{cases}1+2t=1-3u\\2-2t=u\\3-2t=1-2u\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}2t=-3u\\u=2-2t\ (2)\\2-2t=2u\ \ (3)\end{cases}$$

Les équations (2) et (3) sont contradictoires ; il n'existe pas de solution à ce système d'équation. L'affirmation 4 est donc **fausse**.

EXERCICE 3 (spé)

1.a) Avec (x, y) un couple d'entiers relatifs, si $15x - 12y$ est divisible par 3, on peut l'écrire sous la forme $3*(ax-by)$. C'est en effet le cas, car $15x - 12y = 3*(5x-4y)$.
$15x - 12y$ est bien divisible par 3.

1. b) Pour qu'un point M(x, y) appartienne à la droite $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$, il faut qu'il vérifie cette équation.

Ainsi, $M(x,y)\in\Delta_1 \leftrightarrow y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3} \leftrightarrow 12y=15x-8 \leftrightarrow 12y-15x=8$.

Or nous avions supposé à la question 1.a) que si (x, y) était un couple d'entiers relatifs, $15x - 12y$ était divisible par 3. Cependant, 8 n'est pas divisible par 3 !
Conclusion : il n'existe pas de point M(x, y) tels que x et y sont des entiers relatifs.

2.a) On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

Le nombre $ny_0 - mx_0$ est une différence de deux entiers relatifs, donc est lui-même un entier relatif. Montrons maintenant que q divise l'entier np.
$y=\frac{m}{n}x-\frac{p}{q}$ et en faisant apparaître np : $ny=mx-\frac{np}{q}$ (1)

Le point $M_0(x_0, y_0)$ appartenant à la droite Δ, il vérifie alors l'équation (1) donc on peut écrire $ny_0=mx_0-\frac{np}{q}$, puis en faisant apparaître l'entier relatif $N_0 = ny_0-mx_0$: $N_0=-\frac{np}{q}$

Le quotient d'entiers relatifs étant également un entier relatif, on en déduit que **q divise np.**

2.b) D'après le théorème de Gauss, avec a, b et c des entiers, si a divise le produit bc, et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c. Ici, q divise np, et p et q sont premiers entre eux, donc q divise n.

3.a) On pose n = qr. D'après le théorème de Bézout, deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que au + bv = 1.
n et *r* sont premiers entre eux d'après l'énoncé, il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que nu + mv = 1.

En effectuant un changement de variable avec n=qr et v=-v', on se retrouve avec **qru – mv'=1**.

3.b) Partons de la relation démontée à la question précédente, à savoir nu - mv=1 **(1)**. On veut montrer qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels qu'on ait $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

(1) $\leftrightarrow\ (pr) * nu - (pr) * mv = pr \ \leftrightarrow\ upr - vpr * \frac{m}{n} = \frac{pr}{n}$
Or $n = qr$ donc $\frac{r}{n} = q$
Ainsi, **(1)** $\leftrightarrow\ upr - vpr * \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \ \leftrightarrow\ -upr = -vpr * \frac{m}{n} - \frac{p}{q}$

En posant **x_0 = -vpr** et **y_0 = -upr**, on obtient la relation souhaitée : $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

Il existe donc bien un couple (x_0 = -vpr, y_0 =-upr) d'entiers relatifs tel que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.

4) Considérons la droite Δ d'équation : $y_0 = \frac{3}{8}x_0 - \frac{7}{4}$.

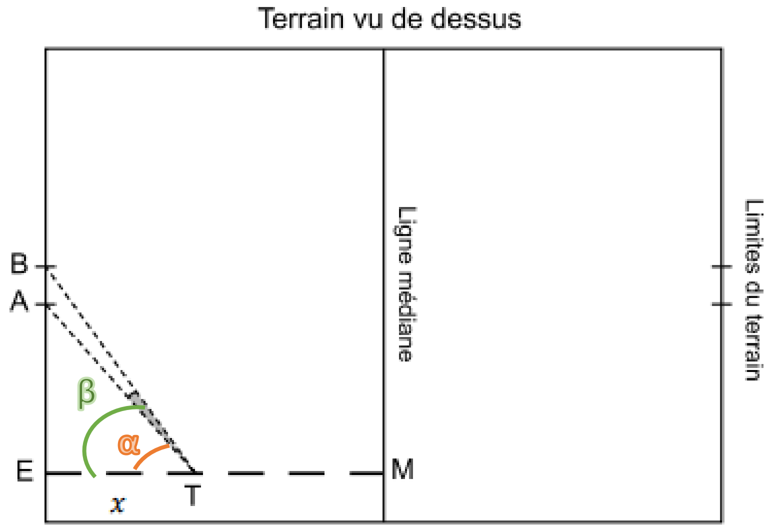
Par identification avec la relation **(2)**, on a : $\begin{cases} m = 3 \\ n = 8 \\ p = 7 \\ q = 4 \end{cases}$

Pour montrer que cette droite possède un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs, il faut reprendre le raisonnement et les hypothèses utilisés lors des questions précédentes. Pour résoudre la question 3b), nous avions montré d'abord que q divisait n avec $n = qr$. Ici, 4 divise bien 8, donc nous pouvons en déduire qu'il existe bien un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs appartenant à la droite d'équation : $y_0 = \frac{3}{8}x_0 - \frac{7}{4}$.

5.a) L'algorithme étudié reprend les étapes du raisonnement mené tout au long de cet exercice. A la question 3b), nous avons montré que si q ne divise pas n, alors il n'y a pas de solution, c'est-à-dire pas de couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs appartenant à la droite Δ. C'est bien ce que l'algorithme fait : lorsque q ne divise pas n, il renvoie « Pas de solution ». Au contraire, si q divise n, il existe un couple d'entiers relatifs appartenant à la droite Δ - l'algorithme teste bien cette condition et cherche le point correspondant. Il va se terminer, car nous avons imposé que q divise n et dans ces conditions, il existe forcément un couple d'entiers relatifs qui appartiennent à Δ.

5.b) L'algorithme affiche, dans le cas ou q divise n, le point de coordonnées entières relatives qui appartient à la droite Δ. Sinon, il affiche qu'il n'y a pas de solutions.

EXERCICE 4



1) Exprimons tan α :

$$\tan \alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}$$

Puis tan β :

$$\tan \beta = \frac{EB}{ET} = \frac{25 + 5{,}6}{x} = \frac{30{,}6}{x}$$

2) Notons $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ et étudions le signe de sa dérivée, ce qui est possible car *f(x)* est dérivable sur]0 ; π/2[comme quotient de fonctions dérivables :
$f'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ sur]0 ; π/2[. La dérivée de la fonction tangente étant strictement positive sur cet intervalle, la fonction tangente est donc strictement croissante sur]0 ; π/2[.

3) Sur la figure, et d'après la relation de Chasles, on déduit que γ = β – α.

Les angles α et β appartiennent bien à l'intervalle]0 ; π/2[, par conséquent leur différence aussi. On peut donc exprimer tan γ pour x ∈$]0\ ;\ 50]$:

$$\tan\gamma = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{30,6}{x}-\frac{25}{x}}{1+\frac{30,6}{x}*\frac{25}{x}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2+765}{x^2}} = \frac{5,6x}{x^2+765}$$

4) La fonction tangente étant strictement croissante sur l'intervalle d'étude]0 ; π/2[, l'angle γ est maximal quand $\frac{5,6x}{x^2+765} = \frac{5,6}{x+\frac{765}{x}}$ l'est, donc lorsque $x+\frac{765}{x}$ est minimal.

Soit $g(x) = x + \frac{765}{x}$. Cette fonction est dérivable sur]0 ; 50] comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

On calcule sa dérivée : $(g(x))' = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2-765}{x^2}$ on en déduit que son signe dépend de celui du numérateur, car le dénominateur est toujours positif.

En résolvant $x^2 - 765 = 0$ on trouve $x = \ \pm\sqrt{765}$. On peut maintenant poser le tableau pour l'étude du sens de variation de la fonction *g(x)* :

x	0		$\sqrt{765}$		50
g'(x)		−	0	+	
g(x)		$\searrow$	55,32	$\nearrow$	

Le minimum de la fonction *g(x)* correspond au maximum de tan γ (composition de la fonction inverse, strictement décroissante sur l'intervalle d'étude, avec *g(x)*).

Ainsi, tan γ est maximal pour $x = \sqrt{765}$. On mesure ensuite l'angle correspondant à cette mesure : $\tan\gamma = \frac{5,6*\sqrt{765}}{765+765}$ puis $\boldsymbol{\gamma} = Arctan\left(\frac{5,6*\sqrt{765}}{765+765}\right) = \ Arctan\left(\frac{5,6*\sqrt{765}}{765+765}\right) \approx \boldsymbol{0,10\ rad}$