BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

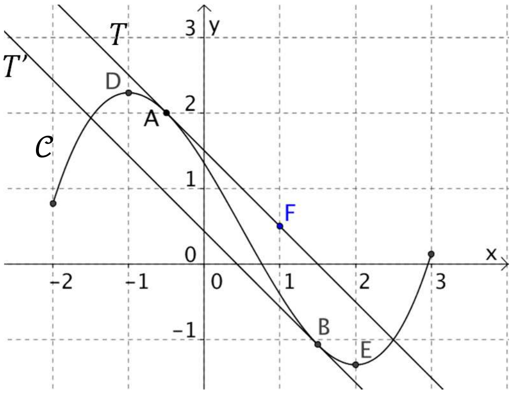
Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$. On note f' la fonction dérivée de cette fonction sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.



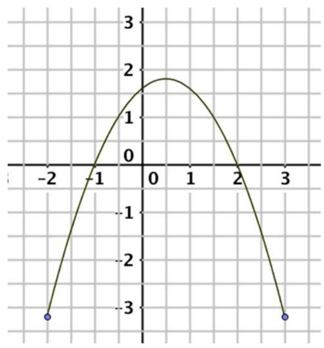
On dispose des renseignements suivants :

- T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(-0{,}5\ ;\ 2)$, elle passe par le point $F(1\ ;\ 0{,}5)$.
- T' est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse $\frac{3}{2}$.
- Les droites T et T' sont parallèles.
- Les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points D d'abscisse -1 et E d'abscisse 2 sont parallèles à l'axe des abscisses.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

Affirmation 1.
Les nombres $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $f'\left(\frac{3}{2}\right)$ sont tous deux égaux à -1.

Affirmation 2.
La courbe ci-contre représente la fonction f' sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.



Affirmation 3.
La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$.

Affirmation 4.
Sur $[-2\ ;\ 0]$, toute primitive de f est croissante.

Exercice 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Partie A

Le musée dispose d'un site internet. Pour acheter son billet, une personne intéressée peut se rendre au guichet d'entrée du musée ou commander un billet en ligne.
Trois types de visite sont proposés :

- La visite individuelle sans location d'audioguide.
- La visite individuelle avec location d'audioguide.
- La visite en groupe d'au moins 10 personnes. Dans ce cas, un seul billet est émis pour le groupe.

Le site internet permet uniquement d'acheter les billets individuels avec ou sans location d'audioguide.
Pour la visite de groupe, il est nécessaire de se rendre au guichet d'entrée du musée.

Sur l'année 2015 l'enquête a révélé que :

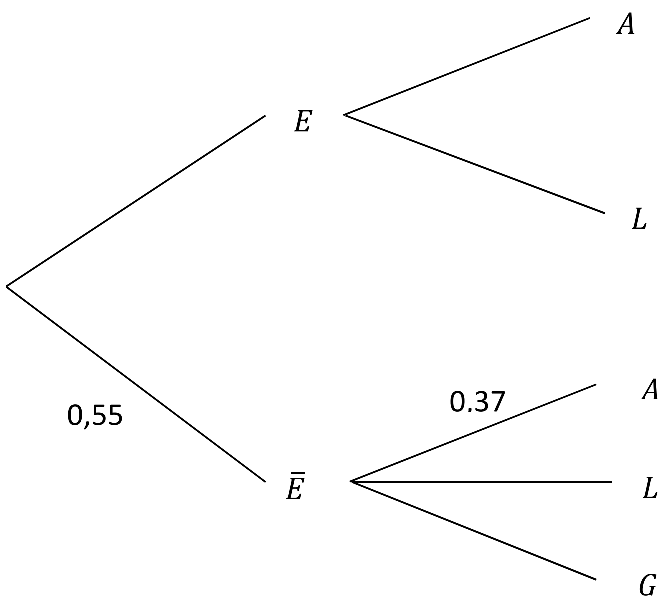
- 55% des billets d'entrée ont été achetés au guichet du musée ;
- parmi les billets achetés au guichet du musée, 51% des billets correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide, et 37% à des visites avec location d'audioguide ;
- 70% des billets achetés en ligne correspondent à des visites individuelles sans location d'audioguide.

On choisit au hasard un billet d'entrée au musée acheté en 2015.
On considère les événements suivants :

- E : « le billet a été acheté en ligne »
- A : « le billet correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide »
- L : « le billet correspond à une visite individuelle sans location d'audioguide »
- G : « le billet correspond à une visite de groupe »

On rappelle que si E et F sont deux événements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'événement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'événement E sachant que l'événement F est réalisé. On note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant qui représente la situation décrite dans l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité que le billet choisi ait été acheté en ligne et corresponde à une visite individuelle avec location d'audioguide est égale à 0,135.

3. Montrer que $p(A) = 0{,}3385$.

4. Le billet choisi correspond à une visite individuelle avec location d'audioguide. Quelle est la probabilité que ce billet ait été acheté au guichet du musée ?
On arrondira le résultat au millième.

Partie B

Pour gérer les flux des visiteurs, une partie de l'enquête a porté sur la durée d'une visite de ce musée. Il a été établi que la durée D d'une visite, en minutes, suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 15$.

1. Déterminer $p(90 \leq D \leq 120)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Le directeur précise qu'il augmentera la capacité d'accueil de l'espace restauration du musée si plus de 2% des visiteurs restent plus de 2 heures et 30 minutes par visite. Quelle sera alors sa décision ?

Partie C

Sur l'ensemble des musées d'art contemporain, 22% des visiteurs sont de nationalité étrangère. Sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du musée considéré précédemment, 490 visiteurs sont de nationalité étrangère.
Que peut en conclure le directeur de ce musée? Argumenter.

Exercice 3 (5 points)

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une commune, l'école de musique propose des cours d'éveil musical.
En 2013, 20% des enfants de la commune suivaient les cours d'éveil musical de cette école. Chaque année, 70% des enfants inscrits restent dans l'école l'année suivante, et par ailleurs, 20% des enfants de la commune qui n'y étaient pas inscrits viennent s'y ajouter.
Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical en $(2013+n)$,
- d_n la proportion des enfants de la commune qui ne sont pas inscrits à cet éveil musical en $(2013+n)$,
- $E_n = (\, c_n \quad d_n\,)$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $(2013+n)$.

Ainsi, on a $E_0 = (0{,}2 \quad 0{,}8)$.

On choisit au hasard un enfant de la commune.

Partie A

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste. On note :
- C l'état « l'enfant est inscrit aux cours d'éveil musical »
- D l'état « l'enfant n'est pas inscrit aux cours d'éveil musical »

2. Déterminer la matrice A de transition, c'est-à-dire la matrice vérifiant, pour tout entier naturel n, $E_{n+1} = E_n \times A$.

3. Déterminer E_1 et E_2.

4. Déterminer l'état probabiliste stable en justifiant votre réponse. Interpréter les résultats.

Partie B

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, on a $c_n + d_n = 1$.
Justifier que pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0{,}5c_n + 0{,}2$.
On admet pour la suite de l'exercice que tout entier naturel n, $c_n = -0{,}2 \times 0{,}5^n + 0{,}4$.

2. Montrer que la suite (c_n) est croissante.

3. **a.** Proposer un algorithme affichant la proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical à partir de 2013 jusqu'à l'année $(2013+n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur.

b. La proportion des enfants de la commune inscrits à cet éveil musical franchira-t-elle le seuil de 39% ? Si oui, indiquer l'année en expliquant la démarche.

4. Le directeur de cette école affirme que si ce modèle d'évolution reste valable, la proportion d'enfants de la commune inscrits à cet éveil musical dépassera le seuil de 50%. Peut-on valider cette affirmation ? Argumenter la réponse.

Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des enceintes acoustiques sans fil. Le coût de production d'une enceinte est de 300 euros.
On note x le prix de vente en centaines d'euros d'une enceinte.

Une étude de marché permet de modéliser la situation : pour tout réel x de l'intervalle $[3\,;10]$, si le prix de vente d'une enceinte est x centaines d'euros, alors le nombre d'acheteurs est modélisé par $f(x) = \mathrm{e}^{-0,25x+5}$.

Ainsi, $f(x)$ est une approximation du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de x centaines d'euros. Par exemple, si le prix de vente d'une enceinte est fixé à 400 euros, le nombre d'acheteurs est approché par $f(4)$.

1. Donner une valeur approximative du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de 400 euros par enceinte.

On appelle marge brute la différence entre le montant obtenu par la vente des enceintes et leur coût de production.

2. Quelle est la marge brute de cette entreprise pour un prix de vente de 400 euros par enceinte ?

On note $g(x)$ la marge brute, en centaines d'euros, réalisée par l'entreprise pour un prix de vente de x centaines d'euros par enceinte.

3. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[3\,;\,10]$,

$$g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$$

4. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

factoriser(dériver[$(x-3) * \exp(-0{,}25x+5)$])
$-\dfrac{x-7}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x+5}$

a. En utilisant le résultat du logiciel de calcul formel, étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[3\,;\,10]$.

b. Pour quel prix de vente unitaire l'entreprise réalisera-t-elle la marge brute maximale ? Donner alors une valeur approchée de cette marge brute à l'euro près.

5. Soit G la fonction telle que $G(x) = (-4x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$ pour tout réel x de $[3\,;10]$.

a. Montrer que G est une primitive de la fonction g.

b. On pose $I = \int_3^{10} g(x)\,\mathrm{d}x$. Déterminer la valeur exacte de I.