BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 8 pages, y compris celle-ci.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + \ln(x)$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Affirmation 1.
On note F la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f qui vérifie $F(1) = 0$.
Pour tout réel x strictement positif, $F(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 2.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

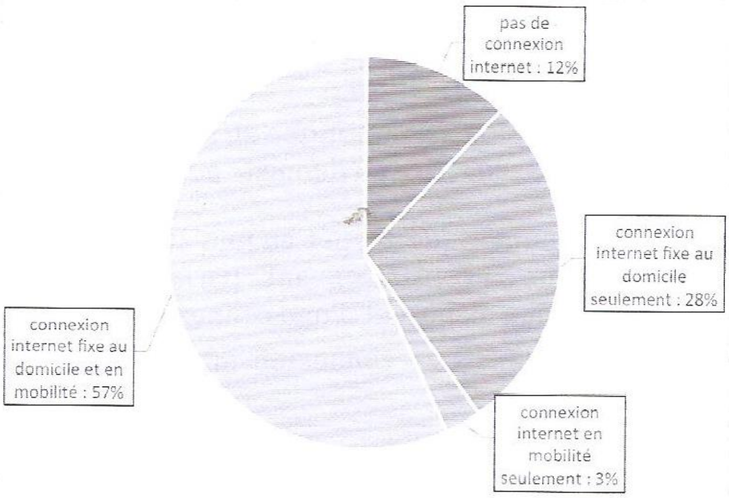
Affirmation 3.
L'équation $f(x) = 2$ possède exactement une solution dans l'intervalle $[1\,;10]$.

Affirmation 4.
Il existe au moins un point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la tangente en ce point est située entièrement sous la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le graphique suivant indique le type de connexion à internet dont disposent les Français âgés de plus de 12 ans en juin 2016.



Source : CREDOC, Enquêtes sur les « Conditions de vie et les aspirations », juin 2016.

On choisit au hasard une personne âgée de plus de 12 ans dans la population française.
On note D l'événement « la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile ».
On note M l'événement « la personne dispose d'une connexion internet en mobilité ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, $p(E)$ désigne la probabilité de l'événement E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de l'événement E sachant que l'événement F est réalisé. On note $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

Partie A

1. Donner sans justification $p(D \cap M)$, puis justifier que $p(D) = 0,85$.
2. Calculer la probabilité que la personne dispose d'une connexion internet fixe au domicile sachant qu'elle dispose d'une connexion internet en mobilité.
3. Calculer la probabilité de l'événement « la personne dispose d'une connexion internet ».
4. Calculer $p_{\overline{M}}(\overline{D})$.

Partie B

On interroge un échantillon aléatoire de 100 personnes dans la population française. Soit X la variable aléatoire qui, à cet échantillon, associe le nombre de personnes ayant une connexion internet fixe au domicile.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. Déterminer $P(X \leq 75)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de Français ayant une connexion internet fixe au domicile pour un échantillon de taille 100.

2. Une enquête sur les usages du numérique, menée en juin 2016 auprès des habitants d'un petit village de montagne, amène au constat suivant : parmi les 100 habitants de plus de 12 ans de ce village, 76 d'entre eux disposent d'une connexion internet fixe au domicile.

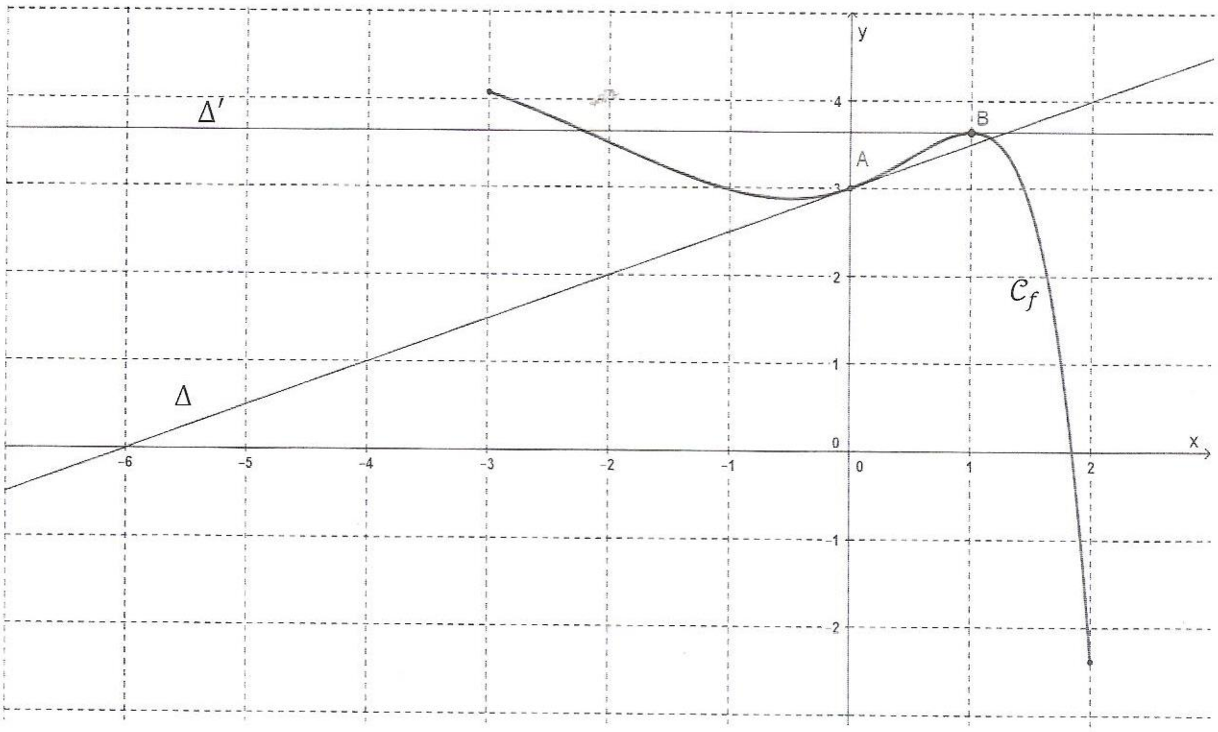
   Que peut-on penser de l'équipement en connexion internet fixe au domicile dans ce village ?

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point A de coordonnées $(0\ ;3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$;
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

- la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3\ ;-0{,}5]$ et $[1\ ;2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0{,}5\ ;\ 1]$;
- la droite Δ d'équation $y = 0{,}5x + 3$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A ;
- la tangente Δ' à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.

2. Quel est le signe de $f'(-2)$?

3. Donner la valeur de $f'(0)$.

4. Le point A est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?

5. Déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On admet qu'il existe trois réels a, b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la partie A est définie, pour tout réel x de $[-3\,;2]$, par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c = -2$.

2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3\,;\,2]$, par :

$$f'(x) = (ax^2 + (2a + b)x - 2 + b)\mathrm{e}^x.$$

En utilisant les résultats de la partie A, justifier que $b = 2{,}5$ puis que $a = -1$.

Partie C

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3\,;2]$ par

$$f(x) = (-x^2 + 2{,}5x - 2)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;2]$

$$f'(x) = (-x^2 + 0{,}5x + 0{,}5)\mathrm{e}^x.$$

2. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $[-3\,;\,2]$.

3. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,2]$.

b. Donner la valeur de α arrondie au centième.

Exercice 4 (5 points)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : « Approfondissement » ou « Ouverture culturelle ».

Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

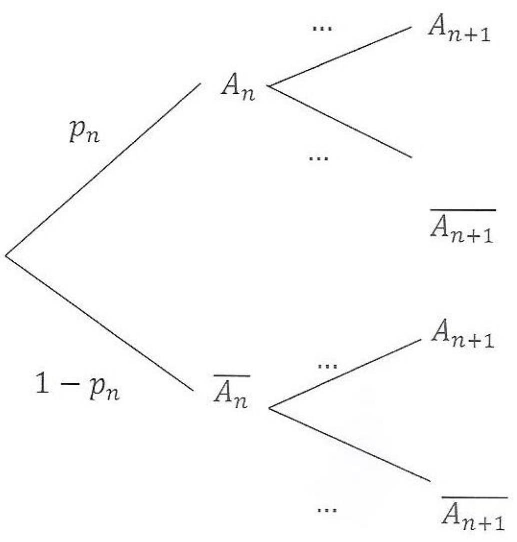
La première semaine, 20% des élèves de la classe ont choisi « Approfondissement » et tous les autres ont choisi « Ouverture culturelle ». On admet que

- 20% des élèves ayant choisi « Ouverture culturelle » une certaine semaine s'inscrivent en « Approfondissement » la semaine suivante ;
- 30% des élèves ayant choisi « Approfondissement » une certaine semaine s'inscrivent en « Ouverture culturelle » la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « l'élève a choisi « Approfondissement » la n-ième semaine » et p_n la probabilité de l'événement A_n. On a alors $p_1 = 0,2$.

1. Recopier l'arbre ci-dessous et remplacer chacun des quatre pointillés par la probabilité correspondante.



2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - 0{,}4.$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et préciser la valeur de son premier terme u_1.

b. En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	I et N sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1 P est un nombre réel
Entrée	Saisir N
Initialisation	P prend la valeur 0,2
Traitement	Pour I allant de 2 à N : P prend la valeur $0{,}5P + 0{,}2$ Fin Pour
Sortie	Afficher P

a. Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 5$.

b. Modifier l'algorithme afin qu'il affiche le numéro de la première semaine pour laquelle le pourcentage des élèves de la classe ayant choisi « Approfondissement » dépasse 39,9.