Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Obligatoire Série S – Amérique du Nord

<u>Exercice 1</u>

Remarque : les résultats seront approchés au millième.

Partie A

X suit la loi normale : $N(\mu=2900\,;\sigma=1250)$

1) $P(X\leq4000)=0{,}81057$ arrondi à 0,811

$P(X>4000)=1-P(X\leq4000)=0{,}189$

La probabilité pour que le montant du devis dépasse 4000€ est de **0,189**.

2) $P(X<\alpha)=0{,}10$

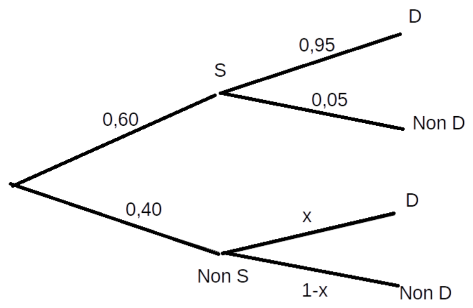
La loi normale inverse donne le résultat $\alpha=1298{,}06054$ arrondi à 1298.

Le montant minimum pour que le devis soit pris en compte est de **1298 €**.

Partie B

Arbre des cas possibles :

Nous ne connaissons pas la probabilité conditionnelle $P_{\bar{S}}(D)$ (que nous appelons x).



1) $P(S\cap D)=P(S)\times P_S(D)=0{,}60\times0{,}95=0{,}57$

Tableau à double entrée des probabilités élémentaires :

Maintenant que nous avons 3 données du tableau (rouge et bleues), nous pouvons le compléter

Probabilités absolues	S	$\bar{S}$	
D	0,57	0,016	0,586
$\bar{D}$	0,03	0,384	0,414
	0,60	0,40	1

Données de l'énoncé Résultats calculés Résultats obtenus par différences

2) Nous savons que le message n'est pas un spam, quelle est la probabilité qu'il soit déplacé ?
On cherche $P_{\overline{S}}(D)$

D'après le tableau à double entrée : $P_{\overline{S}}(D)=\dfrac{P(\overline{S}\cap D)}{P(\overline{S})}=\dfrac{0{,}016}{0{,}4}=0{,}04$

La probabilité pour qu'un message qui n'est pas un spam soit déplacé est **0,04**.

Autre méthode utilisant l'arbre :
Utilisons l'information 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam soit :
$P(D)=0{,}586$
D'après la formule des probabilités totales :
$P(D)=P(S\cap D)+P(\overline{S}\cap D)$
$P(D)=P(S)\times P_S(D)+P(\overline{S})\times P_{\overline{S}}(D)$
En remplaçant par les valeurs numériques :
$0{,}586=0{,}60\times 0{,}95+0{,}40\,x \;\Rightarrow\; x=0{,}04$

3) Nous devons calculer $P_{\overline{D}}(S)=\dfrac{P(\overline{D}\cap S)}{P(\overline{D})}$ (formule des probabilités conditionnelles)

$P_{\overline{D}}(S)=\dfrac{P(S\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{0{,}03}{0{,}414}=0{,}07246$ arrondi à 0,072.

La probabilité pour qu'un message non déplacé soit un spam est **0,072**.

4) Le tirage de Bernoulli correspondant : dans la population des messages déplacés vers le spam, on tire un message au hasard. S'il est fiable : le test est vrai, faux sinon.
Sur une semaine, on obtient un échantillon des messages déplacés de 231 tirages de Bernoulli.

La fréquence de l'échantillon est $f=\dfrac{13}{231}\approx 0{,}056$

L'échantillon suit une loi binomiale B(n=231, p=0,027).
On peut considérer que sa moyenne suit une loi normale car les 3 critères sont respectés :
$n=231 > 30$; $n\,p=231\times 0{,}0274=6{,}237 > 5$; $n(1-p)=231\times 0{,}9726 > 5$

L'intervalle de fluctuation à 95 % avec l'hypothèse p = 0,027
est $I=\left[p-1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\,p+1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]=[0{,}006097974\,;0{,}047902026]$
arrondi à I = [0,006 ; 0,048]

La fréquence de l'échantillon (0,056) est en dehors de l'intervalle de confiance à 95 %.
On doit donc remettre en cause l'affirmation du fabricant comme quoi 2,7 % des messages déplacés sont fiables.

Exercice 2

Remarque : l'énoncé ne donnant pas la précision des résultats, nous la prendrons arbitrairement à 3 décimales.

Partie A

1) $f(x)=\dfrac{-b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}}+e^{\frac{-x}{b}}\right)+\dfrac{9}{4}$

Le changement de x en -x échange des 2 termes exponentiels de la somme qui ne change pas :

$f(-x)=\dfrac{-b}{8}\left(e^{\frac{-x}{b}}+e^{\frac{x}{b}}\right)+\dfrac{9}{4}=f(x)$

On en déduit que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) Dérivée de f(x) :

Dérivée de $e^{\left(\frac{x}{b}\right)}=e^{u}$ avec $u=\dfrac{x}{b}$: $(e^{u})'=u'e^{u}$ avec $u'=\dfrac{1}{b}$

Dérivée de $e^{\left(\frac{-x}{b}\right)}=e^{u}$ avec $u=\dfrac{-x}{b}$: $(e^{u})'=u'e^{u}$ avec $u'=\dfrac{-1}{b}$

$f'(x)=\dfrac{-b}{8}\left(\dfrac{1}{b}e^{\frac{x}{b}}+\left(\dfrac{-1}{b}\right)e^{\frac{-x}{b}}\right)+0=\dfrac{-1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}}-e^{\frac{-x}{b}}\right)$

3) Signe de $e^{\frac{x}{b}}-e^{\frac{-x}{b}}$:

La fonction exponentielle est une fonction croissante : $a<b\Rightarrow e^{a}<e^{b}$

Cas $x>0$	$\dfrac{x}{b}>0$ alors $\dfrac{-x}{b}<0<\dfrac{x}{b}$ comme la fonction exponentielle est croissante : $e^{\frac{-x}{b}}<e^{\frac{x}{b}}$ d'où $e^{\frac{x}{b}}-e^{\frac{-x}{b}}>0$ en multipliant par $\dfrac{-1}{8}$ on obtient : $f'(x)<0$
Cas $x<0$	x et -x sont échangés : $f'(x)>0$
Cas x = 0	les 2 exponentielles valent 1 : f'(0) = 0

Tableau de variations :

x	-2		0		2
Signe de f'(x)	$f'(-2)$	+	0	−	$f'(2)$
Variation de f(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

Le point sommet S a pour coordonnées $(0;f(0))=\left(0;\dfrac{9-b}{4}\right)$ (car les 2 exponentielles valent 1)

Partie B

1) Calcul de b : $f(0)=2=\dfrac{9-b}{4}\Rightarrow b=9-8=1$

2) La fonction f(x) est décroissante sur [0 ; 2] elle part de $2>1{,}5$ pour x=0,

et elle atteint $f(2)=\frac{-1}{8}(e^2+e^{-2})+\frac{9}{4}\approx 1{,}31<1{,}5$ pour x=2.

f(0) et f(2) sont de part et d'autre de la valeur 1,5.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f(x) prend la valeur 1,5 une fois et une seule dans l'intervalle [0 ; 2].

Calcul de a par lecture graphique à partir de l'intervalle [0 ; 2] : $1{,}5=\frac{-1}{8}(e^a+e^{-a})+\frac{9}{4}$,

que l'on transforme en $g(x)=\frac{9}{4}-1{,}5-\frac{1}{8}(e^a+e^{-a})$ que l'on compare à 0.

g(1,76) = 0,002 ; g(1,765) = -0,002
$a\in[1{,}76\,;1{,}765]$ on doit donc l'arrondir à : **a = 1,76**.

3) a = 1,8 et b = 1 : pour calculer la masse d'un vantail, il nous faut sa surface S.

S est obtenue par : $S=\int_0^a f(x)dx=\int_0^{1{,}8} f(x)dx$ avec $f(x)=\frac{-1}{8}(e^x+e^{-x})+\frac{9}{4}$

La primitive de e^x est e^x et celle de e^{-x} est $-e^{-x}$ que l'on vérifie en dérivant.

Une primitive de f(x) est donc $F(x)=\frac{-1}{8}(e^x-e^{-x})+\frac{9}{4}x$

$S=F(1{,}8)-F(0)\approx 3{,}314-0$

La masse du vantail est $m=S\rho\approx 3{,}3\times 20=66\,kg\ >\ 60\,kg$
Le client va donc automatiser son portail.

Partie C

Surface de la planche OCES : $2a=3{,}6$
Surface de la planche OCHG : Nous avons besoin de la tangente à la courbe en F(1 ; f(1))

$f(1)=\frac{-1}{8}(e+e^{-1})+\frac{9}{4}\approx 1{,}864$

$f'(1)=\frac{-1}{8}(e-e^{-1})\approx -0{,}294$

Equation de la tangente : $y=y_F+f'(x_F)(x-x_F)$
Formule littérale :

$y=\frac{-1}{8}\left(e+\frac{1}{e}\right)+\frac{9}{4}-\frac{1}{8}\left(e-\frac{1}{e}\right)(x-1)$

$y=\frac{-e}{8}-\frac{1}{8e}+\frac{9}{4}+(\frac{-e}{8}+\frac{1}{8e})(x)+\frac{e}{8}-\frac{1}{8e}$

$y=\frac{-1}{4e}+\frac{9}{4}+(-e+\frac{1}{e})(\frac{x}{8})$

Formule numérique : $y\approx 1{,}864-0{,}294(x-1)=-0{,}294x+2{,}158$

Aire de la planche sous cette droite : $\int_0^{1{,}8} y(x)dx=[-0{,}294\frac{x^2}{2}+2{,}158x]_0^{1{,}8}\approx 3{,}408$

On peut faire le même vantail avec moins de bois.
L'économie est donc : $3{,}6-3{,}408=0{,}192\,m^2$ pour chaque vantail, soit environ 0,4 m^2 pour le portail complet.

Exercice 3

1) $u_0=3$ donc $u_0 u_1=u_0+u_1 \Leftrightarrow 3u_1=3+u_1 \Rightarrow u_1=\frac{3}{2}$

$u_0 u_1 u_2=u_0+u_1+u_2 \Leftrightarrow \frac{3\times 3}{2}u_2=3+\frac{3}{2}+u_2 \Rightarrow u_2=\frac{9}{7}$

2) $s_n=u_0+\ldots+u_{n-1}=u_0\times\ldots\times u_{n-1}$

2.a) $s_{n+1}=s_n+u_n=s_n\times u_n$

$s_n>u_0+\ldots$ comme tous les termes sont positifs : alors : $s_n>u_0>1$

2.b) Pour n > 0, on peut utiliser la relation précédente de s_{n+1} :

$s_n+u_n=s_n\times u_n \Rightarrow (s_n-1)u_n=s_n \Rightarrow u_n=\frac{s_n}{s_n-1}$

2.c) Cas $n>0$: Nous pouvons utiliser le résultat précédent.

$u_n>1\Leftrightarrow\frac{s_n}{s_n-1}>1$ car $s_n-1\neq 0$

$\frac{s_n}{s_n-1}>1\Leftrightarrow s_n>s_n-1\Leftrightarrow 0>-1$ Comme $0>-1$ est vrai $u_n>1$ est vrai pour tout $n>0$

Cas n = 0 : $u_0=3>1$

En conclusion : $u_n>1$ est vraie pour tout $n\geq 0$

3.a) Algorithme :

Entrée	Saisir n	Valeurs au premier passage :
	Saisir u	$u=u_0$
Traitement	s prend la valeur u	$s_1=u_0$
	Pour i allant de 1 à n :	
	| u prend la valeur s / (s - 1)	$u=u_1=\frac{s_1}{s_1-1}$ puis $u=u_n=\frac{s_n}{s_n-1}$
	| s prend la valeur s + u	$s=s_2=s_1+u_1$ puis $s=s_{n+1}=s_n+u_n$
	Fin Pour	
Sortie	Afficher u	$u=u_n$

3.b) La suite (u_n) est décroissante et supérieure à 1 :
Elle peut donc converger vers 1.

4.a) Nous allons démontrer la proposition $s_n>n$ par récurrence :

Initialisation : n = 1 : $s_1=u_0 u_1=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}>1$

Hérédité : nous supposons que pour une valeur n donnée : $s_n>n$,
alors $s_{n+1}=s_n+u_n>n+1$ car $s_n>n$ d'après l'hypothèse de récurrence et $u_n>1$ d'après le résultat de la question 2c.
En conclusion, la méthode de démonstration par récurrence nous permet d'affirmer que la proposition $s_n>n$ est vraie $\forall n>0$

4.b) Quand n tend vers l'infini, $s_n > n$ tend également vers l'infini.

La suite (u_n) converge vers 1 : $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}} \rightarrow 1$

Exercice 4

1.a) Les droites (UV) et (EF) sont perpendiculaires au plan (USE) donc les plans (UVK) et (EFK) qui les contiennent sont perpendiculaires au plan (USE) et leur intersection (KM) aussi.
[KM] étant perpendiculaire au plan (USE) est parallèle à [UV] et [EF].

1.b) [UK] et [NP] sont les intersections du plan soleil-ombre passant par [UV].
Il coupe les deux plans parallèles (SOA) et (GCB) selon des droites parallèles : [UK] et [NP].

2.a) Le point K appartient au segment [SE].
Ce qui se traduit par l'équation vectorielle : $\vec{SK} = \lambda \vec{SE}$ avec $\lambda \in \Re$
Projeté sur les 3 axes de coordonnées, cette équation donne le système :

$$x_K - x_S = \lambda(x_E - x_S) \Rightarrow 1{,}2 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = 0{,}3$$
$$y_K - y_S = \lambda(y_E - y_S) \Rightarrow y_K = 0$$
$$z_K - z_S = \lambda(z_E - z_S) \Rightarrow z_K - 3{,}5 = -\lambda = -0{,}3 \Rightarrow z_K = 3{,}2$$

Le point K a pour coordonnées **(1,2 ; 0 ; 3,2)**

2.b) Un vecteur est perpendiculaire à un plan s'il est perpendiculaire à 2 vecteurs non colinéaires du plan.
Nous calculons le produit scalaire du vecteur $\vec{n}$ avec les vecteurs $\vec{UV}$ et $\vec{UK}$:

$$\vec{n}.\vec{UV} = (7;0;3).(0;8;0) = 0+0+0 = 0$$
$$\vec{n}.\vec{UK} = (7;0;3).(1{,}2;0;-2{,}8) = 8{,}4 - 8{,}4 = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est bien perpendiculaire au plan (UVK).

Equation cartésienne du plan (UVK) : 7 x + 0 y + 3 z = d
Traduisons que le point U appartient au plan pour déterminer d :

$$3 \times 6 = d$$

L'équation cartésienne du plan (UVK) est donc : **7 x + 3 z = 18**

2.c) N appartient simultanément au plan (UVK) et à la droite (FG).
Traduction de son appartenance à (FG) : Ses coordonnées sont de la forme : $N = (x_N; 5; 2{,}5)$
Il vérifie l'équation du plan : $7x_N + 3 \times 2{,}5 = 18 \Rightarrow x_N = \frac{10{,}5}{7} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$
N a pour coordonnées **(1,5 ; 5 ; 2,5)**

2.d) Tracé de la ligne polygonale de la véranda :
1) Nous traçons une parallèle à [EF] passant par K qui coupe [SF] en M.
2) Nous joignons M et N.
3) Pour le point P, il nous faut un deuxième point du plan (GCB) d'équation : y = 5
Nous prenons le point W(0 ; 5 ; 6) entre U et V.
Nous prolongeons la droite (WN) qui coupe [BC] en P.

3) Calcul de l'angle ([SG],[OC]).

Nous utilisons la formule suivante du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v}=|u|.|v|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

$$\cos(\vec{SG},\vec{OC})=\frac{(0;5;-1).(0;5;0)}{\sqrt{5^2+1^2}\times 5}=\frac{25}{5\sqrt{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}\approx 0{,}981$$

angle $\widehat{(\vec{SG},\vec{OC})}\approx \arccos(0{,}981)\approx 11{,}31°>7°$

La condition pour l'écoulement des eaux est bien remplie.