Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Obligatoire Série S – Centres étrangers Afrique

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.
On choisit au hasard un sachet dans la production journalière. ***La masse de ce sachet, en gramme, est modélisée par la variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ= 175.***
De plus, une observation statistique a montré que 2% des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170g, c'est à dire : ***P(X ≤ 170) = 0,02.***

Question 1)
Quelle est la probabilité arrondie au centième, de l'événement " la masse du sachet est comprise entre 170 et 180g " ?

→ Réponse b : 0,96

Explications :
La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance μ= 175. Par symétrie, la probabilité que la masse soit inférieure à 170g et la probabilité que la masse soit supérieure à 180g sont donc égales.
Et on sait que P(X ≤ 170) = 0,02

Donc P(170 ≤ X ≤ 180) = 1 - 2 x 0,02 = 0,96

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B. Lorsqu'il est produit par la ***machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.***

Question 2)
Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

→ Réponse a : 0,72

Explications :
On note *Da* la variable aléatoire qui compte le nombre de bonbons déformés.

Da suit une loi Binomiale de paramètre n= 50, p = 0,05 car :
- on effectue 50 tirages aléatoires et indépendants des bonbons de la machine A.
- l'événement " le bonbon prélevé aléatoirement est déformé " a une probabilité p = 0,05.
- *Da* compte le nombre de bonbons déformés.

On cherche P(*Da* ≥ 2) :

$$P(Da \geq 2) = 1 - P(Da = 0) - P(Da = 1) = 1 - \binom{50}{0} \times 0{,}05^0 \times 0{,}95^{50} - \binom{50}{1} \times 0{,}05^1 \times 0{,}95^{49} \approx 0{,}72$$

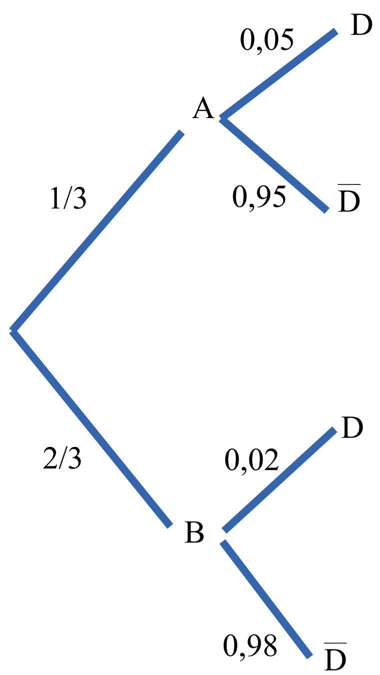
La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. ***Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02****. Dans un test de contrôle, on prélève au hasard dans l'ensemble de la production.* ***Celui-ci est déformé.***

Question 3)
Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

→ **Réponse c : 0,44**

Explications :
On note D l'événement " le produit est déformé".
On note A l'événement " le produit vient de la machine A".
On note B l'événement " le produit vient de la machine B".

On cherche $P_D(B)$.



D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_D(B) = \frac{P(D\cap B)}{P(D)}$$

avec :

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=\frac{1}{3}\times 0{,}05+\frac{2}{3}\times 0{,}02=0{,}03$$

et $P(D\cap B)=\frac{2}{3}\times 0{,}02$

d'où $P_D(B) = \dfrac{\frac{2}{3}\times 0{,}02}{0{,}03}\simeq 0{,}44$

*La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire **Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.***

Question 4)
Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

→ Réponse a : 0,45

Explications :
Y suit une loi exponentielle de paramètre λ d'espérance E = 1/ λ

D'où $\lambda=\frac{1}{E}=\frac{1}{500}$

$$P(Y\leq 300)=1-e^{\frac{-1}{500}\times 300}\approx 0{,}45$$

*L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au **niveau de confiance de 95 % avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05**. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.*

Question 5)
Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

→ Réponse c : 1600

Explications :
Soit f la fréquence du caractère étudié dans un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance de 95 % est tel que :

$$I=[f-\frac{1}{\sqrt{(n)}};f+\frac{1}{\sqrt{(n)}}]$$ avec une amplitude $$A=\frac{2}{\sqrt{(n)}}$$

On veut donc que :

$$A\leq 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(n)}}{2}\geq\frac{1}{0{,}05}\Leftrightarrow\sqrt{(n)}\geq\frac{2}{0{,}05}=40\Leftrightarrow n\geq 1600 \quad (\text{car } n \text{ postif})$$

EXERCICE 2 (4 points)

$$d1:\begin{cases}x=2+t\\y=3-t\\z=t\end{cases}\qquad d2:\begin{cases}x=-5+2t'\\y=-1+t'\\z=5\end{cases}$$ t et t' appartenant à R

1) A(2;3;0)

On a donc xA=2, yA=3 et zA=0

Si on choisit t=0 , les coordonnées de A vérifient bien d1.
En effet :

$$\begin{cases} x=2+0=xA \\ y=3-0=yA \\ z=0=zA \end{cases}$$

2) Les coordonnées d'un vecteur directeur d'une droite de représentation paramétrique de la forme
$\begin{cases} x=xA+at \\ y=yA+bt \\ z=zA=ct \end{cases}$ sont (a,b,c)

Donc :

$\vec{u1}=(1,-1,1)$ est un vecteur directeur de d1, et $\vec{u2}=(2,1,0)$ est un vecteur directeur de d2.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites d1 et d2 ne sont donc pas parallèles.

3) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{v}.\vec{u1}=(1,-2,-3).(1,-1,1) = 1\times 1+(-2)\times(-1)+(-3)\times 1 = 1+2-3 = 0$$
$$\vec{v}.\vec{u2} =(1,-2,-3).(2,1,0) = 1\times 2+(-2)\times 1+0 = 2-2 = 0$$

4) *Soit P , plan passant par A et dirigé par* $\vec{u1}$ *et* $\vec{v}$

4.a)
Propriété 1 :
On dit que $\vec{n}$ *est normal au plan s'il est orthogonal aux vecteurs directeurs de ce plan.*

Pour P d'équation carthésienne : $5x+4y-z-22=0$ *on a* $\vec{n}=(5,4,-1)$
et $\vec{n}.\vec{u1}=(5,4,-1).(1,-1,1)=5-4-1=0$

$\vec{n}.\vec{v}=(5,4,-1).(1,-2,-3)=5-8+3=0$

Donc le vecteur n est bien normal au plan P.

Propriété 2 :
L'unique plan P passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ *est l'ensemble des points M tels que* $\vec{AM}.\vec{n}=0$

$$Soit\ M(x,y,z) \quad M\in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-2)+4(y-3)-z = 0 \quad \Leftrightarrow 5x+4y-z-22 = 0$$

Une équation cartésienne du plan P est donc bien : 5x + 4y - z = 0

4.b) On résout le système d'équations suivant

$$d2\cap P=\begin{cases}x=-5+2t'\\ y=-1+t'\\ z=5\\ 5x+4y-z-22=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+2t'\\ y=-1+t'\\ z=5\\ 5(-5+2t')+4(-1+t')-5-22=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+2t'\\ y=-1+t'\\ z=5\\ 14t'-56=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+2t'\\ y=-1+t'\\ z=5\\ t'=\frac{56}{14}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5+2\times 4\\ y=-1+4\\ z=5\\ t'=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=3\\ z=5\\ t'=4\end{cases}\quad donc\, d2\ coupe\ P\ en\ B(3\,;3\,;5)$$

5) $On\ considère\ \Delta\ la\ droite\ dirigée\ par\ \overrightarrow{(v)}=(1,-2,-3)\ et\ passant\ par\ B(3\,;3\,;5).$

5.a) Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta:\ \{M(x,y,z)\ ;\ \overrightarrow{BM}=k\vec{v},\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left\{M(x,y,z)\ ;\begin{pmatrix}x-3\\ y-3\\ z-5\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -3\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\right.\begin{cases}x=k+3\\ y=-2k+3\\ z=-3k+5,\ k\in\mathbb{R}\end{cases}$$

5.b) On cherche l'éventuelle intersection des deux droites :

$$\begin{cases}2+t=k+3\\ 3-t=-2k+3,\\ t=-3k+5\end{cases} k,t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}2+5-3k=k+3\\ 3-5+3k=-2k+3\\ t=-3k+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\ t=-3k+5=2\end{cases}$$

Pour t= 2 on a : $\begin{cases}x=2+t=4\\ y=3-t=1\\ z=t=2\end{cases}$ donc C, point d'intersection de d1 et Δ existe et a pour coordonnées (4 ; 1 ; 2).

5.c) Le but du problème était de trouver une droite Δ qui soit à la fois sécante à d1 et d2 et orthogonales à ces deux droites.

- D'après la question 3, la droite Δ est orthogonale à d1 et d2 par orthogonalité des vecteurs directeurs.
- D'après la question 4b, B appartient à la fois à Δ et à d2
- D'après la question 5b, les droites d1 et Δ sont sécantes en C.

Donc, la droite Δ est bien orthogonale et sécante avec d1 et d2.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

$f(t)=20e^{-0,1t}$, $t\in[0,+\infty]$ $f(0)=20\mu g/L$

1) $t_{0,5}$ est telle que $f(t_{0,5})=\frac{1}{2}f(0)$

On résout donc :

$$20e^{-(0,1t)}=10\Leftrightarrow e^{-(0,1t)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -0,1t=\ln(\frac{1}{2})\Leftrightarrow t=\frac{-\ln(2)}{-0,1}\Leftrightarrow t=10\ln(2)$$

Ainsi, $t_{0,5}=10\ln(2)\approx 6,9$ h

2) Le médicament est éliminé dès que f(t) < 0,2µg/L

$$f(t)\leqslant 0,2\Leftrightarrow 20e^{(-0,1t)}\leqslant 0,2\Leftrightarrow e^{(-0,1t)}\leqslant 0,01\Leftrightarrow -0,1t\leqslant\ln(0,01)\Leftrightarrow t\geqslant\frac{(\ln(0,01))}{-0,1}$$
$$\Leftrightarrow t\geqslant -10\ln(0,01)\Leftrightarrow t\geqslant 10\ln(100)\approx 46,1\,h$$

Il faut donc plus de 46h pour que le médicament soit éliminé.

3) $$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 20e^{-(0,1t)}dt=\lim_{x\to+\infty}20\left[\frac{1}{-0,1}e^{-(0,1t)}\right]_0^x=\lim_{x\to+\infty}20\left(\frac{(e^{(-0,1x)})}{-0,1}-\frac{1}{-0,1}\right)=200$$

$$\textit{Rappel}:\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

Donc l'ASC pharmacocinétique vaut bien 200 µg.h/L

Partie B

$g(t)=20(e^{(-0,1t)}-e^{-t})$, $t\in[0,+\infty]$ et $g(0)=0\mu g/L$

1) g est dérivable sur $[0,+\infty]$ car exponentielle est dérivable sur R.

$$g'(t)=20(-0,1e^{(-0,1t)}-e^{-t})=20e^{-t}(-0,1e^{-0,9}+1)=20e^{-t}(1-0,1e^{0,9}t)$$

2) Étudions le signe de g'(t) :

$e^{-t}\geqslant 0$ *par définition de la fonction exponentielle.*

On cherche donc le signe de $1-0,1e^{-(0,9t)}$:

$$1-0,1e^{-(0,9t)}\geqslant 0\Leftrightarrow 0,1e^{-(0,9t)}\geqslant -1\Leftrightarrow e^{-(0,9t)}\leqslant 10\Leftrightarrow t\leqslant\frac{(\ln(10))}{0,9}\approx 2,56$$

D'où :

x	0		$\frac{\ln 10}{0,9} \approx 2.56$		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
variations de g	0	↗	$g\left(\frac{\ln 10}{0.9}\right) \approx 13.94$	↘	

La durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale vaut donc environ 2,56h c'est à dire 2 heures et 34 min.

<u>Partie C</u>

Soit la suite (u_n) définie par :
u_1= 20 et u_{n+1}= 0,5 u_n + 20

1) Soit P la propriété suivante :
$$\forall\, n \geqslant 1 \quad u_n = 40 - 40 \times O,5^n$$

Initialisation de la récurrence :
Pour n=1 :

$$u_1 = 20 \quad et \quad u_1 = 40 - 40 \times 0,5 = 40 - 20 = 20$$

La propriété est donc vraie au rang 1.

Hérédité :
Soit n ∈ ℕ tel que la propriété P soit vérifiée au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang n+1:

$$u_{n+1} = 0,5\, u_n + 20 = 0,5(40 - 40 \times 0,5^n) + 20 = 20 - 40 \times 0,5^{(n+1)} + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{(n+1)}$$

Conclusion :
La propriété est vraie pour tout n supérieur ou égal à 1.

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40 \quad car \quad \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 \quad quand \quad -1 < q < 1$

3) L'équilibre est atteint dès que $u_n \geq 38$ µg/L. On résout l'inéquation suivante :

$$u_n \geqslant 38 \Leftrightarrow 40 - 40 \times 0,5^n \geqslant 38 \Leftrightarrow 40 \times 0,5^n \leqslant 2 \Leftrightarrow 0,5^n \leqslant 0,05 \Leftrightarrow n \ln(0,5) \leqslant \ln(0,05) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{(\ln(0,05))}{(\ln(0,5))} \approx 4,3$$

(car ln(0,5)<0, on inverse donc l'inégalité)

Comme n est un entier, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre l'équilibre vaut 5.

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A : Etude du cas particulier où n=6

1) Pour n= 6, le pentagone est un hexagone régulier :
- Les six angles au centre de l'hexagone sont tous égaux, ayant pour valeur :

$$\frac{(2\pi)}{6} rad = \frac{\pi}{3} rad$$

Sachant que le triangle A_6OB_6 est isocèle en O, les deux autres angles sont aussi égaux à π/3 rad, le triangle est donc équilatéral.

D'après l'énoncé, l'aire de l'hexagone vaut 1, les six triangles isomériques le constituant ont donc la même aire qui vaut 1/6 unité d'aire.

2) Soit H le projeté orthogonal de B_6 sur OA_6. Dans le triangle rectangle HA_6B_6, on applique le Théorème de Pythagore :

$A_6B_6=r_6$
$HA_6= r_6/2$
on note h, la hauteur recherchée HB_6

Il vient :

$$(A_6 B_6)^2 = HA_6{}^2 + h^2 \Leftrightarrow r_6{}^2 = (\frac{r_6}{2})^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4} r_6{}^2 \quad h\, et\, r\, étant\, positifs\,, h = \frac{\sqrt{(3)}}{2} r_6$$

3) L'aire de A_6OB_6 vaut 1/6 d'après question 1). Or l'aire de A_6OB_6 peut également s'exprimer sous la forme:

$$A_{A6OB6} = \frac{OA_6 \times h}{2} = \frac{r_6 \times \frac{\sqrt{(3)}}{2} r_6}{2} = \frac{\sqrt{(3)}}{4} \times r_6{}^2$$

Donc :

$$\frac{\sqrt{(3)}}{4} \times r_6{}^2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow r_6 = \sqrt{\frac{4}{6\sqrt{(3)}}} = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{(3)}}}$$

Partie B : Cas général avec n ≥ 4

1) Soit H le projeté orthogonal de B_n sur OA_n, on note h la hauteur HB_n.

Dans le triangle rectangle OHB_n, il vient :

$$\sin(\theta_n) = \frac{h}{r_n} \quad donc \quad h = \sin(\theta_n) \times r_n$$

L'aire du triangle OA_nB_n vaut alors : $A = \frac{r_n \times h}{2} = \frac{r_n{}^2 \sin(\theta_n)}{2}$

2) On cherche la valeur de θ_n en fonction de n sachant que l'aire du polygone Pn vaut 1.

Les angles aux centres θ_n ont donc tous la même valeur : $2\pi/n$.

De plus l'aire de chaque sous triangle vaut 1/n unité d'aire.

On a alors avec la question 1) :

$A=\frac{1}{n}$ *et* $A=\frac{r_n{}^2\sin(\theta_n)}{2}$ avec $\theta_n = 2\pi/n$.

Donc : $\frac{1}{n}=\frac{r_n{}^2\sin(2\frac{\pi}{n})}{2} \Leftrightarrow r_n=\sqrt{\frac{2}{n\sin(2\frac{\pi}{n})}}$

<u>Partie C</u> : étude de la suite (r_n)

On considère $f(x)=\frac{x}{\sin(x)}$ pour tout x dans]0 ; π[strictement croissante sur cet intervalle.

Et pour tout n ≥ 4 $r_n=\sqrt{\frac{1}{\pi}f(\frac{2\pi}{n})}$

1) $\forall n\geqslant 4, 0<2<n<n+1 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{(n+1)}<\frac{1}{n}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<2\frac{\pi}{(n+1)}<2\frac{\pi}{n}<2\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0<2\frac{\pi}{(n+1)}<2\frac{\pi}{n}<\pi$

On compose alors ensuite cette inégalité par la fonction f, comme f est strictement croissante le sens de l'inégalité est conservé:

$\forall n\geqslant 4\ f(0)<f(2\frac{\pi}{n+1})<f(2\frac{\pi}{n})<f(\pi)$

On compose ensuite par la fonction racine, strictement croissante également, donc le sens de l'inégalité est conservé : $\forall n\geqslant 4,\ 0<\sqrt{\frac{1}{\pi}f(2\frac{\pi}{(n+1)})}<\sqrt{\frac{1}{\pi}f(2\frac{\pi}{n})}<\sqrt{\frac{1}{\pi}f(\pi)}$

c'est-à-dire : $0<r_{n+1}<r_n$ La suite r_n est donc bien décroissante.

2) Par théorème de la limite monotone, r_n est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite finie notée L. On admet que L= 1/ π

3) L'algorithme affiche la plus grande valeur de n pour laquelle $r_n < 0{,}58$

Avec la calculatrice on trouve :

$r_{10}\approx 0{,}5833>0{,}58$ *et* $r_{11}\approx 0{,}5799<0{,}58$

Donc n= 11.