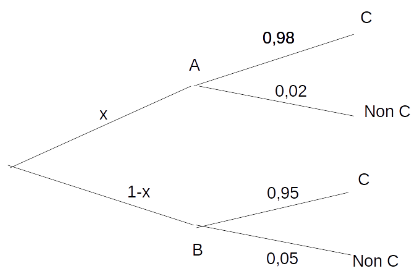
Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Obligatoire Série S – Pondichéry

Exercice 1

Partie A

Arbre des cas possibles :



A.1) On utilise la loi des probabilités totales :

$$P(C)=P(A\cap C)+P(B\cap C)$$
$$P(C)=P(A)\times P_A(C)+P(B)\times P_B(C)$$
$$P(C)=x\times 0{,}98+(1-x)\times 0{,}95$$
$$P(C)=0{,}03\,x+0{,}95$$

A.2) P(C) = 0,96

$$0{,}03\,x+0{,}95=0{,}96$$
$$0{,}03\,x=0{,}01$$
$$x=\frac{1}{3}$$
$$P(A)=\frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad P(B)=1-P(A)=\frac{2}{3} \quad \text{soit} \quad \frac{P(B)}{P(A)}=2$$

La probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est le double de la probabilité que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

B.1) La durée de vie pour la loi exponentielle de paramètre λ est $E(Z)=\frac{1}{\lambda}$

$$E(Z)=5 \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{1}{5}=0{,}2$$

B.2) $P(Z>a)=e^{-\lambda a} \;\Rightarrow\; P(Z>2)=e^{-0{,}2\times 2}=e^{-0{,}4}\approx 0{,}670$

B.3) $P_{Z>3}(Z>5)=\dfrac{P(Z>5)}{P(Z>3)}$

Comme la loi de probabilité exponentielle est constante dans le temps, la probabilité pour que la machine fonctionne encore plus de 2 ans est la même que si elle était au début de son utilisation.

$$P_{Z>3}(Z>5)=P(Z>2)=e^{-0{,}4}$$

Partie C

C.1) $P(83 \leq X \leq 87) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$

La probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % est de 1-0,683 = **0,317**

C.2) $P(85 - a \leq X \leq 85 + a) = 0{,}9$

En utilisant la fonction Normale inverse symétrique, on obtient : $z \approx 1{,}64485$

soit $a = z\sigma = 1{,}64485 \times 2 \approx 3{,}290$

La probabilité que la teneur en cacao soit différent de plus de **3,29 %** est de 0,10. Donc 90 % des tablettes auront a priori une teneur en cacao entre 81,7 % et 88,3 %.

C.3) L'échantillon suit une loi binomiale B(n=550, p=0,9) correspondant à n tirages de Bernoulli :
Si la plaque tirée au sort appartient à l'intervalle [81,7 ; 88,3], le résultat est positif sinon, le résultat est négatif. La fraction de plaques positives étant de p=0,90 dans la population.
On peut considérer que la moyenne de l'échantillon suit une loi normale car :

$n \geq 30$, $n\,p \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$

Prise de **décision au seuil de 95 %** :
La moyenne de l'échantillon doit appartenir à l'intervalle de confiance à 95 % :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}9 \times 0{,}1}{550}} \approx 0{,}025$$

$$I = [0{,}875 ; 0{,}925]$$

La moyenne de l'échantillon est : $\dfrac{(550-80)}{550} \approx 0{,}855$

et se trouve à l'extérieur de l'intervalle de confiance au seuil de 95 %
On doit conclure que **l'affirmation de la chocolaterie est fausse**.

<u>Exercice 2</u>

1.a) $z^2 - 6z + c = 0$ discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4c = 4(9-c) < 0$

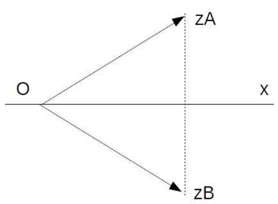
car $c > 9 \Leftrightarrow 9 - c < 0$

Le discriminant étant négatif, l'équation n'admet pas de solution réelle, mais elle admet toujours 2 solutions complexes conjuguées (conjuguées car les coefficients de l'équation son réels).

1.b) $\Delta = -4(c-9) = i^2 4(c-9)$ où $c - 9 > 0$

solutions : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 \pm 2i\sqrt{c-9}}{2}$ en simplifiant, les solutions de (E) sont :

$\{3 - i\sqrt{c-9} ; 3 + i\sqrt{c-9}\}$



2) Justifier que le triangle AOB est isocèle en O : ce qui équivaut à démontrer : $OA = OB$

ou sous forme complexe : $|z_A| = |z_B|$

Les 2 racines z_A et z_B étant complexes conjuguées, elles ont le même module :
le triangle **AOB est donc isocèle**.

3) Le triangle OAB ne peut être rectangle qu'en O car les angles égaux $\hat{A}=\hat{B}$ ne peuvent être droits auquel cas la somme des angles du triangle dépasserait 180°.

Solution 1 :
Si l'angle O est droit, OA se déduit de OB par une rotation de $90°$ ce qui se traduit sous forme complexe par une multiplication par i : $z_A = i\, z_B$

$$3+i\sqrt{c-9}=i(3-i\sqrt{c-9})$$
$$3+i\sqrt{c-9}=3i+\sqrt{c-9}$$

En égalant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons les 2 mêmes équations :

$$3=\sqrt{c-9} \;\Rightarrow\; 9=c-9 \;\Rightarrow\; c=18$$

Il existe bien une valeur de c pour laquelle le triangle AOB est rectangle isocèle en O, et cette valeur est **c=18**.

Solution 2 : l'angle (Ox,OA) doit valoir 45° : $\cos(Ox, OA)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos(Ox, OA)=\frac{\Re(z_A)}{|z_A|}=\frac{3}{\sqrt{9+c-9}}=\frac{3}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

on obtient : $\frac{9}{c}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; c=18$

Exercice 3

Remarque : unité du repère = 2m

Fonction $f(x)=\ln(-2x^2+13{,}5)$ définie sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$

Partie A : étude de f

A.1) Calcul de $f'(x)$: $f(x)=\ln(u)$ avec $u=-2x^2+13{,}5$ et $u'=-4x$

$$f'(x)=\frac{u'}{u}=\frac{-4x}{-2x^2+13{,}5}=\frac{4x}{2x^2-13{,}5}$$

A.2) Tableau de variation de f :

Le dénominateur s'annule pour $x=\pm\sqrt{\frac{13{,}5}{2}}\approx\pm 2{,}598\notin[-2{,}5\,;2{,}5]$

Signe du dénominateur : $2x^2-13{,}5<0$ entre les 2 racines

x	-2,5		0		2,5
x		-		+	
2x²-13,5		-		-	
f ' (x)		+		-	
f	0	↗	ln(13,5)	↘	0

Puisque f croît depuis (-2,5;0) puis décroît jusqu'à (2,5;0), elle est toujours positive ou nulle.
La fonction **f(x) est donc positive ou nulle** sur l'intervalle $[-2{,}5\,;2{,}5]$

Partie B

B.1) La hauteur est $\ln(13,5) \approx 2.603 \neq 2,5$:
Les 3 points sur les axes ne sont pas à la même distance de O, donc la **courbe n'est pas un cercle** de centre O.

B.2) Aire sous la courbe : $A = \int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx\, u.a.$

Comme la courbe est symétrique par rapport à Oy : $\int_{-2,5}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$

donc $A = 2\int_{0}^{2,5} f(x)\,dx\, u.a. = 8\int_{0}^{2,5} f(x)\,dx\, m^2$ car l'unité d'aire est de $4\,m^2$

B.3.a) Calcul de $I = \int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$

Sur la calculatrice : $R = \frac{2,5}{50} \times f(\frac{2,5}{50} \times k) = \frac{1}{20} \times f(\frac{k}{20}) = \frac{1}{20} \times \left(\ln(-2 \times (\frac{k}{20})^2 + 13,5)\right)$

Initialisation	S=0 ; n=50		
Boucle Pour	Etape k	R	S
	1	**0,130 116**	**0,130 116**
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	**0,519 981**
	. . .	. . .	. . .
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	. . .	. . .	. . .
	49	0,020 106	5,197 538
	50	**0**	**5,197 538**
Affichage	S=**5,197 538**		

Comme S est le cumul des R, $S_1 = R_1$ et peut s'obtenir par : $S_1 = R_1 = R_2 - S_2 = 0,130\,116$
$R_4 = R_3 + S_4 = 0,390\,144 + 0,129837 = 0,519\,981$
$S_{50} = 0$ (à calculer), puis $R_{50} = R_{49} + S_{50} = R_{49}$

B.3.b) L'aire de la zone de creusement est donc $A = 8I \approx 8a = 8 \times 5,197\,538 = 41.580304 \approx 42\,m^2$
L'aire de la zone de creusement est de 42 m².

<u>Exercice 4</u>

Suites $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$ et $v_n = 2^n$

Partie A

A.1) Formule en B3 : $B3 = u_{n+1}$ donc $B2 = u_n$ et $A2 = n$
La formule entrée en B3 est $= 2 * B2 - A2 + 3$
Formule en C3 : comme $v_{n+1} = 2v_n$ (avec $C2 = v_n$)
La formule entrée en C3 est $= 2 * C2$
remarque : on aurait aussi pu entrer la formule explicite : = 2^A3

A.2) (u_n) croît comme 2^n (quoique très légèrement moins vite) donc elle tend vers l'infini.

$2\times u_{10}-u_{11}=6160-6153=7$

$2\times u_{11}-u_{12}=12306-12298=8$

$2\times u_{12}-u_{13}=24596-24587=9$

$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\ldots 3.008, 3.004, 3.002, 3.001$

la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ semble converger vers 3

Partie B

B.1) Démontrons par récurrence que $u_n=3\times 2^n+n-2$

La propriété à démontrer est : la formule $u_n=3\times 2^n+n-2$ est vraie

* Initialisation de la récurrence : $u_0=1$ à comparer à $3\times 2^0+0-2=3-2=1$

La formule est vraie pour n = 0

* Hérédité de la propriété :

Nous supposons que la formule est vraie pour **une valeur n donnée** : $u_n=3\times 2^n+n-2$

Nous en déduisons la valeur de $u_{n+1}=2u_n-n+3=2(3\times 2^n+n-2)-n+3$

Soit, en développant : $u_{n+1}=3\times 2^{n+1}+2n-4-n+3=3\times 2^{n+1}+n-1$

Puis, en regroupant (n+1) dans le membre de droite :

$u_{n+1}=3\times 2^{n+1}+(n+1)-2$

remarque, on aurait aussi pu développer l'expression $3\times 2^{n+1}+(n+1)-2=3\times 2^{n+1}+n-1$ *et la comparer à celle de* u_{n+1} *obtenue après développement pour constater leur égalité.*

La formule explicite est héréditaire.

* Comme la formule est héréditaire et vraie au rang n=0, **le raisonnement par récurrence permet d'affirmer qu'elle est vraie pour tout entier n positif ou nul.**

B.2) Les termes 2^n et n tendent vers l'infini : la suite (u_n) **tend vers l'infini.**

B.3) $u_{18}=786\,448<10^6<u_{19}=1\,572\,881$

Le rang du premier terme supérieur à 1 million est le rang 19.

Partie C

C.1) Variation de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$:

Calculons l'accroissement : $\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right)-\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{3\times 2^{n+1}+n+1-2}{2^{n+1}}-\frac{3\times 2^n+n-2}{2^n}$

En mettant les deux termes au même dénominateur :

$$\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right)-\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{3\times 2^{n+1}+n+1-2-(3\times 2^{n+1}+2n-4)}{2^{n+1}}=\frac{n-1-2n+4}{2^{n+1}}=\frac{3-n}{2^{n+1}}$$

Si $n>3$, alors $3-n<0$ donc $\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right)-\left(\frac{u_n}{v_n}\right)<0$

la suite est décroissante à partir du rang 3

C.2) $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{3\times 2^n+n-2}{2^n}=3+\frac{n}{2^n}-\frac{2}{2^n}$

On sait que $0<\frac{n}{2^n}<\frac{1}{n}$ donc $3-\frac{1}{2^{n-1}}<\left(\frac{u_n}{v_n}\right)<3+\frac{1}{n}-\frac{1}{2^{n-1}}$

Comme n et 2^n tendent vers l'infini, leurs inverses tendent vers 0.
Par application du **théorème des suites encadrantes** (ou gendarmes) :
Comme les deux suites qui encadrent $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ ont pour limite 3,

la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a aussi pour limite 3.

Exercice 5

Equation du plan P : $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$

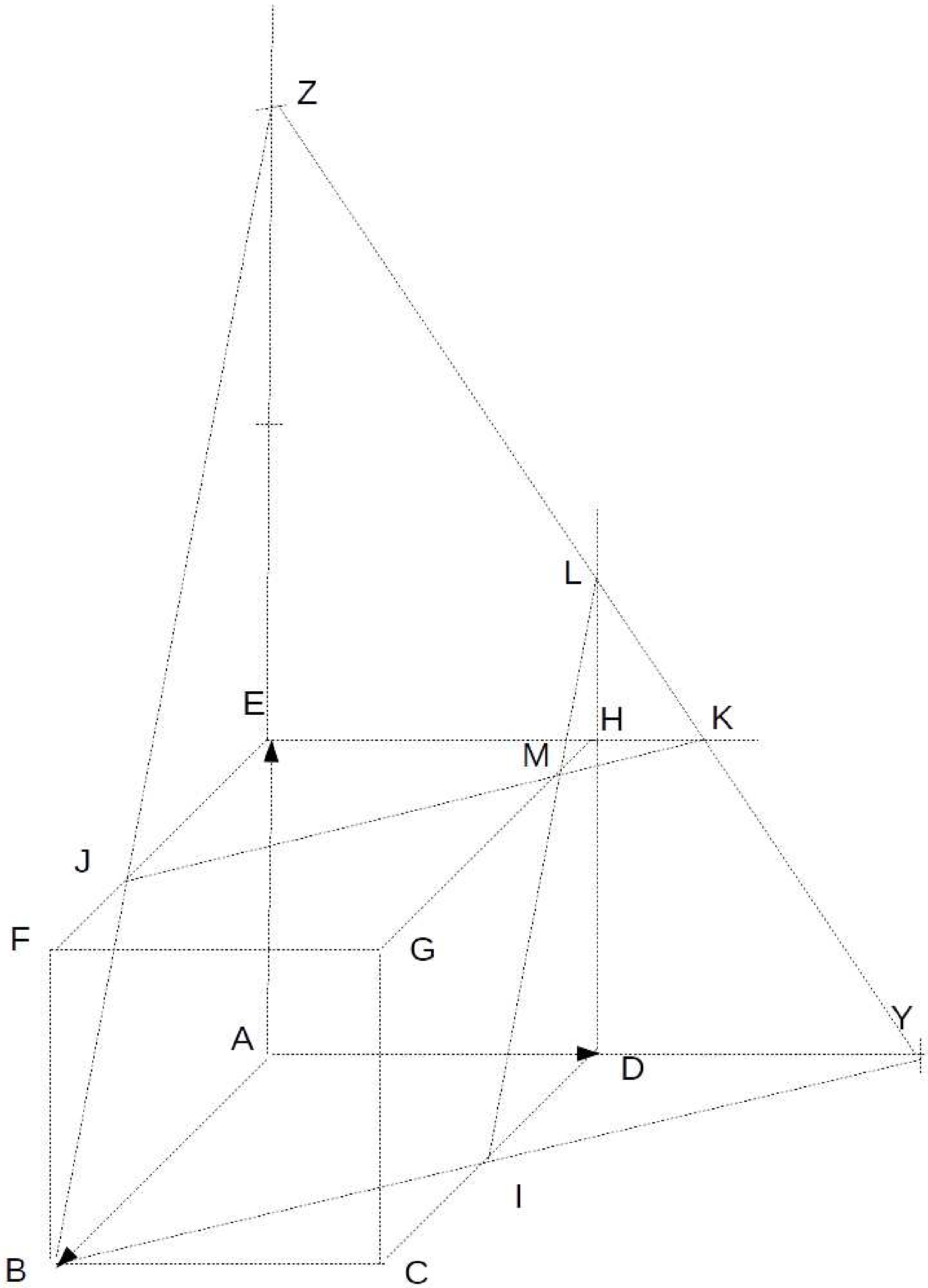
Nous recherchons les intersection du plan avec les 3 axes :
axe Ox : $y=z=0\Rightarrow x=1$ premier point : **(1, 0, 0) = B**
axe Oy : $x=z=0\Rightarrow y=2$ deuxième point : **(0, 2, 0) = Y**
axe Oz : $x=y=0\Rightarrow z=3$ troisième point : **(0, 0, 3) = Z**

Nous joignons ensuite les points appartenant à une même face (même s'ils sont à l'extérieur de la face) afin d'obtenir des points sur les arêtes des autres faces.

Nous joignons les points B et Y du plan xOy (z=0)
Cette droite BY coupe l'arête CD en son milieu $I=(\frac{1}{2},1,0)$
Nous joignons les points B et Z du plan xOz (y=0)
Cette droite BZ coupe l'arête EF en $J=(\frac{2}{3},0,1)$

Plan yOz (x=0) : la droite YZ coupe les arêtes EH et HD du cube sur leur prolongement :
K sur EH et L sur HD
Comme les points J et K appartiennent à la même face EFGH du cube, la droite JK coupe l'arête GH au point M.
Comme les points I et L appartiennent à la même face CDHG du cube, la droite IL coupe l'arête GH au même point M.

L'intersection du plan P avec le cube est le parallélogramme BIMJ.


Z
L
E
H
K
M
J
F
G
A
Y
D
I
B
C