Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Spécialité Série S – Liban

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBF) s'il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Calcul du vecteur $\overrightarrow{DF}$:

$D\ (0;0;0)$ et $F(1;1;1)$

$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_D \\ z_F - z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul de 2 vecteurs non colinéaires du plan (EBG) :

$E(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ et $G(0;1;1)$

$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalité entre $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BF}$:

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EB} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$, par conséquent $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{EB}$

$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EG} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 0$, par conséquent $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{EG}$

Sachant que $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{EB}$ et au vecteur $\overrightarrow{EG}$, on peut donc dire que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2. Pour calculer une des équations cartésiennes du plan (EBG), on suppose :

$M(x;y;z) \in (EBG)$

$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix}$

D'après la question 1 nous avons démontré que $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (EBG). C'est pourquoi on obtient : (EBG): $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DF} = 0$

$$(EBG): (x-1) + (y-1) + (z-0) = 0$$
$$(EBG): x - 1 + y - 1 + z = 0$$
$$(EBG): x + y + z - 2 = 0$$

<u>Rappel :</u> il existe une infinité d'équation cartésienne pour chaque plan.

3. On cherche une équation de la droite (DF), $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur directeur, on suppose $\overrightarrow{DM}$ colinéaire à $\overrightarrow{DF}$.

$D(0;0;0)$, $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$, $M(x;y;z)$

$$(DF) = \overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour la représentation paramétrique de (DF) on obtient :

$$(DF):\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Par conséquent l'intersection entre (DF) et le plan (EBG) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$3t = 2$$

$$t = \frac{2}{3}$$

Alors on obtient le point d'intersection I entre la droite (DF) et le plan (EBG), tel que $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

Partie B

1. Si M est confondu avec D, alors l'angle $\widehat{EMB}$ appartient au triangle équilatérale EMB car chaque côté de ce triangle est égal, puisque ce sont des diagonales de différentes faces du cube. Sachant que la somme des angles d'un triangle équivaut à π, alors la mesure θ en radian est $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{3}$

Si M est confondu avec F, alors l'angle $\widehat{EMB}$ appartient au triangle EMB isocèle et rectangle en F . Par conséquent $\widehat{EMB}$ est un angle droit, alors la mesure en radian θ est $\widehat{EMB} = \frac{\pi}{2}$. De plus, puisque la somme des angles d'un triangle équivaut à π, alors les autres angles $\widehat{BEM} = \widehat{EBM} = \frac{\pi}{4}$

2.a) D'après l'énoncé $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$, de plus on a :

$$\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} \text{ et } x\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} x \times 1 \\ x \times 1 \\ x \times 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \quad \text{où } \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = x \end{cases}$$

On obtient les coordonnées de M suivantes $M(x; x; x)$.

2.b) Calcul des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$:

$M(x; x; x)$, $E(1; 0; 1)$ et $B(1; 1; 0)$

$$\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -x \\ 1-x \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} &= (1-x)(1-x) + 2(1-x)(-x) \\ &= 1^2 - 2x + x^2 - 2x + 2x^2 \\ &= (1-x)^2 - 2x(1-x) \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \qquad \text{car } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

On sait que :

$$ME = MB = \|\overrightarrow{MB}\| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 + (z_B - z_M)^2}$$
$$= \sqrt{(1-x)^2 + (1-x)^2 + (-x)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + 2(1-x)^2}$$

Ajoutons que :

$$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = ME \times MB \times \cos(\widehat{EMB}) = ME^2 \times \cos(\theta)$$
$$= [x^2 + 2(1-x)^2] \times \cos(\theta)$$
$$= (3x^2 - 4x + 2) \times \cos(\theta)$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = 3x^2 - 4x + 1 \\ \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = (3x^2 - 4x + 2) \times \cos(\theta) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$3x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - 4x + 2) \times \cos(\theta)$$
$$\cos(\theta) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$$

3.a) Le triangle MEB est un triangle rectangle, si et seulement si $\cos(\theta) = 0$
D'après le tableau de variation, on voit que f est continue et strictement monotone (décroissante) sur l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}\right]$, de plus $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une seule valeur α sur l'intervalle $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ pour laquelle $f(\alpha) = 0$. Toujours grâce au tableau de variation, on observe que $f(\alpha) = 0$ lorsque $\alpha = \frac{1}{3}$
De même, on voit $f(1) = 0$, alors il existe une autre valeur α pour laquelle $f(\alpha) = 0$, $\alpha = 1$
Alors $\cos(\theta) = 0$, autrement dit le triangle MEB est rectangle si $\alpha = \frac{1}{3}$ ou $\alpha = 1$

3.b) La fonction cosinus étant une fonction décroissante sur $[0; \pi]$, pour que l'angle θ soit maximal, il faut que $\cos \theta$ soit minimal.
Grâce au tableau de variation on voit que le minimum de $f(x)$ se situe en $x = \frac{2}{3}$, par conséquent pour que l'angle soit maximal il faut que le point M soit confondu avec le point $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A – Durée d'attente pour entrer dans un parking souterrain

1. Pour calculer une moyenne à partir d'intervalle, il suffit d'utiliser la valeur centrale de cet intervalle :

$$\overline{m} = \frac{1 \times 75 + 3 \times 19 + 5 \times 10 + 7 \times 5}{75 + 19 + 10 + 5} \approx 1{,}99$$

Le temps d'attente moyen à l'entrée du parking est de 2 minutes environ.

2.a) On sait que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

Si on choisit $\lambda = 0{,}5$ on obtient $E(T) = \frac{1}{0{,}5} = 2$
Ce résultat est bien cohérent avec la moyenne estimée à la question 1.

2.b) On cherche $P(T < 2)$

$$P(T < 2) = P(0 \leq T < 2)$$

$$e^{-0{,}5\times 0} - e^{-0{,}5\times 2} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}6321$$

La probabilité que la voiture mette moins de 2 minutes pour franchir les barrières du parking est de 63,21%.

2.c) On cherche $P_{T\geq 1}(T \leq 2)$, d'après la loi de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{T\geq 1}(T \leq 2) = P_{T\geq 1}(T \leq 1+1) = P(T \leq 1) =$$

$$1 - e^{-0{,}5\times 1} \approx 0{,}3935$$

La probabilité que la voiture mette moins de 2 minutes à franchir les barrières alors qu'elle attend déjà depuis 1 minute est de 39,35%.

Partie B – Durée et tarifs de stationnement dans ce parking souterrain

1.a) Comme l'indique l'espérance de la loi normale (μ), la durée moyenne de stationnement est de 70 minutes.

1.b) On cherche $P(D > 120) = 0{,}5 - P(70 < D < 120)$ car $\mu = 70$
Grâce à la calculatrice Casio 35+ : STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(70\ ,\ 120\ ,\ 30\ ,$
$70)$
$P(D > 120) = 0{,}5 - P(70 < D < 120) \approx 0{,}0478$
La probabilité que le stationnement dépasse 2 heures est de 47,8%.

1.c) On cherche t tel que $P(D \leq t) = 0{,}99$:
Grâce à la calculatrice Casio 35+ : STAT → DIST → NORM → InvN → $InvN(0{,}99\ ,\ 30\ ,\ 70)$
$P(D \leq 140) = 0{,}99$
Le temps maximum pour au moins 99% des voitures est de 140 minutes, soit 2 heures et 20 minutes.

2.

Durée	**< 15 minutes**	**Entre 15 minutes et 1 heure**	**+ 1 heure**	**+ 1 heure**
Tarif	Gratuit	3,5	t	t
Probabilité	$P(D < 15) \approx 0{,}0334$	$P(15 < D < 60) \approx 0{,}3361$	$P(60 < D < 120) \approx 0{,}5828$	$P(120 < D < 180) \approx 0{,}0477$
Coût	0	3,5	$3{,}5 + t$	$3{,}5 + 2t$

$P(D < 15) = 0{,}5 - P(15 < D < 70) \approx 0{,}0334$

STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(15\ ,\ 70\ ,\ 30\ ,\ 70)$

Même utilisation de la calculatrice pour les autres cases de la ligne « probabilité »

Pour trouver t on s'appuie sur l'espérance de la variable D qui est de 5 :

$$E(D) = 5 = 0{,}3361 \times 3{,}5 + 0{,}5828 \times (3{,}5 + t) + 0{,}0477 \times (3{,}5 + 2t)$$

$$1{,}17635 + 2{,}0398 + 0{,}5828t + 0{,}1668 + 0{,}0953t = 5$$

$$t \times (0{,}5828 + 0{,}0953) = 5 - 1{,}17635 - 2{,}0398$$

$$t = \frac{1{,}61705}{0{,}6781} \approx 2{,}3841$$

Pour que le prix moyen soit de 5€, il faut alors que le prix d'une heure supplémentaire soit de $t = 2{,}38$€

<u>Partie C – Temps d'attente pour se garer dans un parking de centre-ville</u>

On sait que $T' \sim N(30; \sigma'^2)$, nous allons centrer réduire T' pour obtenir la variable aléatoire Z :

$$Z = \frac{T' - 30}{\sigma'}$$

$$Z \sim N(0; 1)$$

On sait que $P(T' \leq 37) = 0{,}75$

$$P\left(\frac{T' - 30}{\sigma'} \leq \frac{37\_30}{\sigma'}\right) = 0{,}75$$

$$P\left(Z \leq \frac{7}{\sigma'}\right) = 0{,}75$$

Puisque Z suit la loi normale centrée réduite, on utilise la calculatrice :
STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0\ ,\ 75\ ,\ 1\ ,\ 0)$

$$\frac{7}{\sigma'} \approx 0{,}674490 \quad \text{donc} \quad \sigma' \approx 10{,}3782$$

Par conséquent $T' \sim N(30; 10{,}3782^2)$

STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(10\ ,\ 50\ ,\ 10{,}3782\ ,\ 30)$

$$P(10 < T' < 50) \approx 0{,}9460$$

L'objectif du gestionnaire de 95% n'est pas atteint, seulement 94,6% des voitures restent stationner entre 10 et 50 minutes.

EXERCICE 3 (3 points)

Etude du signe et de la variation de f_k :

$$f'_k(x) = 1 - ke^{-x} = 0$$
$$ke^{-x} = 1$$
$$e^{-x} = \frac{1}{k}$$
$$-x = \ln\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln(k)$$
$$x = \ln(k)$$
$$f(\ln(k)) = \ln k + k \times \frac{1}{e^{\ln k}} = \ln k + 1$$

x	$-\infty$	$x = \ln(k)$	$+\infty$
Signe de $f'_k(x)$	$-$	0	$+$
Variation de $f_k(x)$	$+\infty$ ↘	$\ln k + 1$	↗ $+\infty$

La fonction f_k admet un minimum, qui se situe au point noté A_k, alors on a $A_k(\ln k\,; 1 + \ln k)$. De ces coordonnées nous pouvons déduire que $y = 1 + x$, ce qui signifie que les points sont bien alignés.

EXERCICE 4 spé (5 points)

1.a) Pour le numéro de carte 5635 4002 9561 341 1 on obtient :

$\boldsymbol{k}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\boldsymbol{a_{2k+1}}$	5	3	4	0	9	6	3	1
$\boldsymbol{2a_{2k+1}}$	10	6	8	0	18	12	6	2
$\boldsymbol{R}$	1	6	8	0	0	3	6	2
$\boldsymbol{I}$	1	7	15	15	15	18	24	26

1.b) On considère toujours le même numéro de carte :

$\boldsymbol{k}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\boldsymbol{a_{2k}}$	6	5	0	2	5	1	4
$\boldsymbol{P}$	6	11	11	13	18	19	23

Donc $S = I + P + c = 26 + 23 + 1 = 50 = 5 \times 10$

S est un multiple de 10, le message qui va s'afficher est « Le numéro de la carte et correct. »

1.c) Pour le numéro de carte 6a35 4002 9561 341 1 on obtient :

$\boldsymbol{k}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\boldsymbol{a_{2k+1}}$	6	3	4	0	9	6	3	1
$\boldsymbol{2a_{2k+1}}$	12	6	8	0	18	12	6	2
$\boldsymbol{R}$	3	6	8	0	0	3	6	2
$\boldsymbol{I}$	3	9	17	17	17	20	26	28

$\boldsymbol{k}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\boldsymbol{a_{2k}}$	a	5	0	2	5	1	4
$\boldsymbol{P}$	a	a+5	a+5	a+7	$a + 12$	a+13	a+17

Donc $S = I + P + c = 28 + a + 17 + 1 = 46 + a$

On sait que S est un multiple de 10 et que $a \in [0; 9]$ donc la seule possibilité est $a = 4$.

Pour que le numéro de carte soit correct, il faut qu'il soit 6435 4002 9561 341 1.

2) On sait que S doit être un multiple de 10, on pose x tel que $I + P \equiv x \ [10]$, et $c = 10 - x$.

$$I + P + c \equiv 0 \ [10]$$
$$x + (10 - x) \equiv 0 \ [10]$$

S'il existe 2 clés de sécurité alors :

$$I + P + c \equiv I + P + c' \ [10]$$
$$c \equiv c' \ [10]$$

Or $c \in [0; 9]$, par conséquent c est forcément unique.

3) On suppose un numéro de carte de type $xxxx\ xxxx\ xxxx\ xxx\ x$

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\boldsymbol{a_{2k+1}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{2a_{2k+1}}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$\boldsymbol{R}$	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
$\boldsymbol{I = 8R}$	0	16	32	48	64	8	24	40	56	0
$\boldsymbol{a_{2k}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{P = 7x}$	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$\boldsymbol{S = I + P + c}$	0	24	48	72	96	48	72	96	120	72

Les seuls numéros de cartes qui donnent une valeur de S multiple de 10 sont :
0000 0000 0000 000 0 et 8888 8888 888 8.

4. Il nous faut toujours $S \equiv 0[10]$

Il existe 2 possibilités soit : $a_{2k} = 1$ inversé avec a_{2k+1} (cas n°1)

$a_{2k+1} = 1$ inversé avec a_{2k} (cas n°2)

S' le reste associé à une inversion de chiffres

Cas n°1 :

$$S' \equiv (S - (2a_{2k+1}[9] + (2 \times 1) - 1 + a_{2k+1})\ [10]$$
$$S' \equiv (-(2a_{2k+1}[9] + 1 + a_{2k+1})[10]$$

Par conséquent, on obtient :

$\boldsymbol{a_{2k+1}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{S'[10]}$	1	0	9	8	7	5	4	3	2	0

Cas n°2 :

$$S' \equiv (S - (2[9]) + (2a_{2k}[9] - a_{2k} + 1)\ [10]$$
$$S' \equiv ((2a_{2k}[9] - 1 - a_{2k})[10]$$

Par conséquent, on obtient :

$\boldsymbol{a_{2k}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{S'[10]}$	9	0	1	2	3	5	6	7	8	0

Il n'est donc pas possible de déterminer le chiffre inconnu.