# BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

## SESSION 2017

# MATHÉMATIQUES

# Séries STI2D et STL spécialité SPCL

**Durée de l'épreuve : 4 heures**

**Coefficient : 4**

**ÉPREUVE DU VENDREDI 16 JUIN 2017**

**Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**EXERCICE n° 1 (6 points)**

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.
On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0,1 gramme de ce gaz chaque jour.
Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 660 grammes.

**Partie A**

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.
Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

**Partie B**

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de $0,1$ gramme, le système perd 1% de sa masse de gaz chaque jour.
Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.
Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la masse de gaz dans le réservoir au bout de $n$ jours après cette visite.
On a donc $u_0 = 660$ et on admet que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} = 0,99u_n - 0,1$.

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.

2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre $N$ non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

| |
|---|
| **Variables** |
| $N$ : un nombre entier naturel |
| $k$ : un nombre entier naturel |
| $u$ : un nombre réel |
| **Entrée** |
| Saisir $N$ |
| **Initialisation** |
| $u$ prend la valeur 660 |
| **Traitement** |
| Pour $k$ allant de 1 à … |
| $u$ prend la valeur … |
| Fin pour |
| **Sortie** |
| Afficher $u$ |

   **a.** Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   **b.** Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n + 10$.

   a. Calculer $v_0$.

   b. On admet que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,99$.
   Pour tout entier naturel $n$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 670 \times 0,99^n - 10$.

   d. À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b**.

4. On rappelle que le constructeur préconise de recharger le réservoir au plus tard lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 g.
   Le coût d'une recharge est de 80 euros. Le garagiste propose de réparer le système pour 400 euros.
   Pourquoi est-il plus économique pour cet automobiliste de réparer le système ? Justifier la réponse.

**EXERCICE n° 2 (5 points)**

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1 400 °C à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30 °C. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C.

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps $t$, exprimé en heures, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction $f$, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.

1. **a.** Résoudre sur $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.

   **b.** Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 1370\mathrm{e}^{-0,065t} + 30$.

2. **a.** Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   **b.** Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?

4. **a.** Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.

   **b.** Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325 °C.
   Dans ce cas, faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à 650 °C ? Justifier la réponse.

**EXERCICE n° 3 (4 points)**

Un chef cuisinier décide d'ajouter un « menu terroir » à la carte de son restaurant. S'appuyant sur sa longue expérience, le restaurateur pense qu'environ 30% des clients choisiront ce menu. Ceci le conduit à faire l'hypothèse que la probabilité qu'un client, pris au hasard, commande le « menu terroir » est $p = 0,3$.

**Partie A**

Afin de tester la validité de son hypothèse, le restaurateur choisit au hasard 100 clients et observe que 26 d'entre eux ont commandé un « menu terroir ».
Après discussion avec son comptable, le restaurateur décide d'accepter l'hypothèse que $p = 0,3$.
À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique à 95%, justifier cette décision.

**Partie B**

Une agence de voyage a réservé toutes les tables du restaurant pour la semaine à venir. Le restaurateur sait ainsi que 1 000 clients viendront déjeuner chacun une fois durant la semaine.
Le nombre de « menus terroir » qui seront alors commandés est une variable aléatoire $X$.
On considère que la probabilité qu'un des clients commande un « menu terroir » est $p = 0,3$.

**1.** On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale.

   **a.** Donner ses paramètres.

   **b.** Déterminer la probabilité que le nombre de « menus terroir » commandés soit inférieur ou égal à 315.

**2.** On décide d'approcher la loi binomiale précédente par la loi normale d'espérance $\mu = 300$ et d'écart type $\sigma = 14,49$.

   Justifier les valeurs de $\mu$ et $\sigma$.

   *Dans la suite de l'exercice, on utilisera cette approximation par la loi normale.*
   *Les résultats seront arrondis à* $10^{-2}$ *près.*

**3.** **a.** Estimer $P(285 \leqslant X \leqslant 315)$.

   **b.** Estimer $P(X \geqslant 350)$ et interpréter le résultat obtenu.

**EXERCICE n° 4 (5 points)**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. *Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

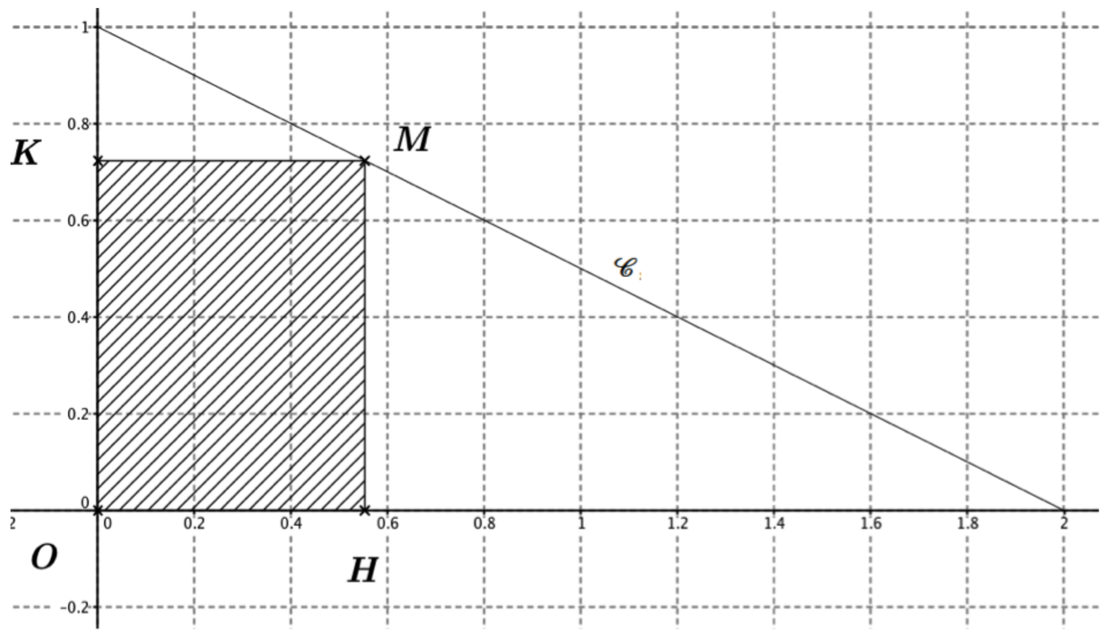
1. **Proposition 1 :** Le nombre complexe $z$ de module $4\sqrt{3}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique $-2\sqrt{3}+6\mathrm{i}$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Les points $A$, $B$ et $C$ ont pour affixes respectives $z_A = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ , $z_B = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C = z_A \times z_B$.

   **Proposition 2 :** Le point $C$ appartient au cercle de centre $O$ et de rayon 4.

3. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x+1$.
   On considère un point $M$ de coordonnées $(x, -\frac{1}{2}x+1)$ sur la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que les points $H(x,0)$ et $K(0,-\frac{1}{2}x+1)$.

   **Proposition 3 :** L'aire, en unités d'aire, du rectangle $OHMK$ est maximale lorsque $M$ a pour abscisse 1.




4. On peut modéliser le temps d'attente d'un client, en minutes, à la caisse d'un supermarché par une variable aléatoire $T$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
   Des études statistiques montrent que la probabilité qu'un client attende plus de 7 minutes à cette caisse est $0,417$.
   On rappelle que pour tout réel $t$ positif, $P(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

   **Proposition 4 :** Le temps moyen d'attente à cette caisse de supermarché est 9 minutes.