Baccalauréat technologique – Série STMG

Session 2017 (Métropole)

Épreuve de Mathématiques

Proposition de corrigé

Ce corrigé est composé de 6 pages.

Notations

Dans tout ce corrigé, pour des soucis pratiques, on utilisera les notations suivantes :

$\forall$: « pour tout » ;

$\Longrightarrow$: « implique » ;

$\Longleftrightarrow$: « équivaut à ».

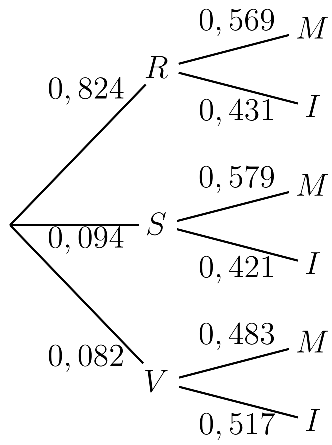
De plus, on notera $\mathbb{P}(A)$ la probabilité de l'événement A et $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de l'événement B sachant A.

*

* *

Exercice 1

1. On complète l'arbre pondéré à partir des données du sujet :



2. L'événement « le logement est une maison individuelle et un résidence principale » correspond à l'événement $R \cap M$. On a alors

$$\mathbb{P}(R \cap M) = \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(M) = 0,824 \times 0,569 = 0,469$$

Le logement sera donc une résidence principale et une maison individuelle avec une probabilité $\underline{\mathbb{P}(R \cap M) = 0,469}$.

3. On cherche la probabilité de l'événement « le logement est une maison individuelle ». Or, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(R \cap M) + \mathbb{P}(S \cap M) + \mathbb{P}(V \cap M) = \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(M) + \mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(M) + \mathbb{P}(V)\mathbb{P}_V(M)$$

$$\mathbb{P}(M) = 0,824 \times 0,569 + 0,034 \times 0,579 + 0,082 \times 0,483 = 0,563$$

Le logement sera donc bien une maison individuelle avec la probabilité $\underline{\mathbb{P}(M) = 0,563}$.

4. On cherche la probabilité $\mathbb{P}_M(R)$. Or, d'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_M(R) = \frac{\mathbb{P}_R(M)\mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0,569 \times 0,824}{0,563} = 0,833$$

Sachant qu'il s'agit d'une maison individuelle, le logement sera donc une résidence principale avec une probabilité $\underline{\mathbb{P}_M(R) = 0,833}$.

Exercice 2

Remarque : cet exercice est un QCM, pour lequel il n'est pas demandé de justifier les réponses. Aussi, les justifications données le sont à titre purement informatif, et ne devaient pas figurer sur la copie.

Partie A

1. Réponse b).

Justification :

On nomme τ le taux d'évolution global, et $S(x)$ la valeur du SMIC horaire en l'année x. On a alors :

$$\tau = \frac{S(2015) - S(2011)}{S(2011)} = \frac{9,61 - 9}{9} \underline{= 6,8\ \%}$$

2. Réponse b).

Justification :

Si on nomme τ_A le taux d'évolution moyen annuel, on a $\tau_A = \frac{\tau}{\Delta t} = \frac{6,8}{2015-2011} = \frac{6,8}{4} \underline{= 1,7\ \%}$.

3. Réponse c).

Justification :

On tire cette réponse de la formule générale du taux d'évolution entre l'année i et l'année $i+1$:

$$\tau_{i \to i+1} = \frac{S(i+1) - S(i)}{S(i)}$$

Partie B

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(60; 5^2)$$

1. Réponse c).

Justification :

On a $p(50 \leqslant X \leqslant 70) = p(X \leqslant 70) - p(X \leqslant 50) = 0,9772 - 0,0228 \underline{= 0,9544}$.

2. Réponse b).

Justification :

On sait que $p(X \geqslant 65) = 1 - p(X \leqslant 65)$. Alors $p(X \geqslant 65) = 1 - 0,8413 \underline{= 0,1587}$.

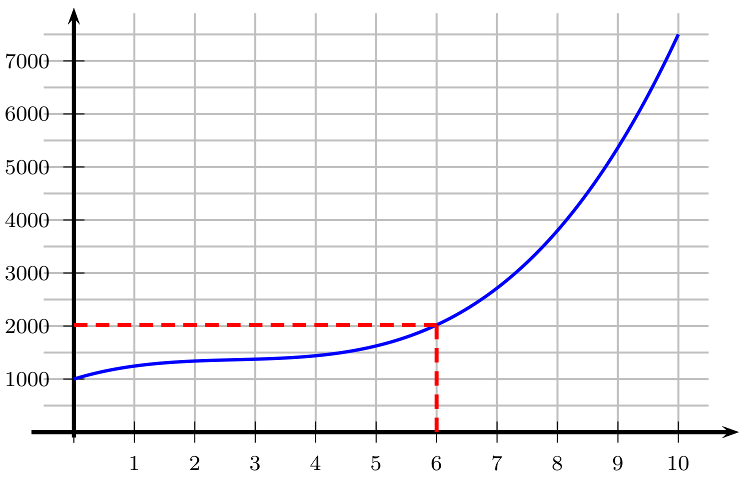
Exercice 3

$$C : x \mapsto 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1000$$

Partie A : Étude du coût total

1. Le montant des coûts fixes a la particularité d'être indépendant de la quantité vendue. On peut également le voir comme le coût lorsque $x = 0$, c'est-à-dire $C_f = C(x = 0) = 1000$ euros. Les coûts fixes s'élèvent donc à $\underline{C_f = 1000\,\text{euros}}$.

2. a) Graphiquement, on lit $C(x = 6) = 2000$ euros.

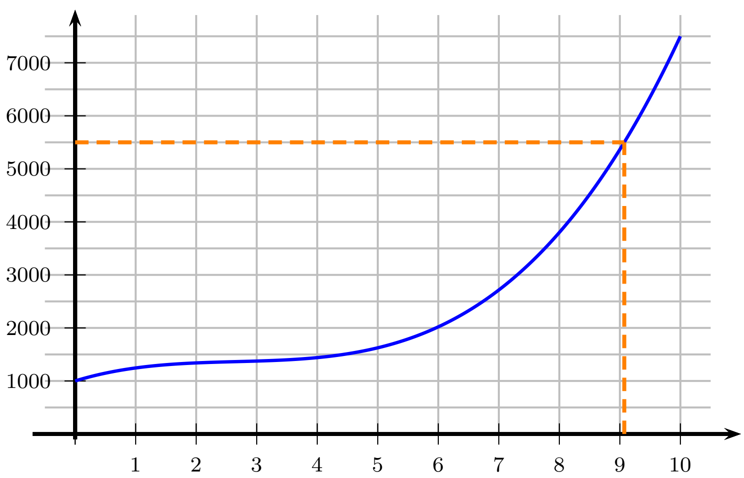


b) On calcule alors :

$$C(x = 6) = 15 \times 6^3 - 120 \times 6^2 + 350 \times 6 + 1000 = 2020$$

D'où, le coût total lorsque l'entreprise produit 6 km de tissu s'élève à $\underline{C(x = 6) = 2020\,\text{euros}}$.

3. Graphiquement, on lit $C(x) = 5500 \iff \underline{x \approx 9\,\text{km}}$.



Partie B : Étude du bénéfice

1. On vend chaque kilomètre de tissu à 530 euros. Aussi, on aura

$$\boxed{R(x) = 530x}$$

2. On sait que le bénéfice est défini comme étant la différence entre la recette et le coût de production. Aussi, on a :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 530x - 15x^2 + 120x^2 - 350x - 1000 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1000$$

On trouve donc bien l'expression donnée.

3. Soit $x \in [0; 10]$. Par les formules du cours pour la dérivation d'un polynôme, on a :

$$B'(x) = 3 \times (-15)x^2 + 2 \times 120x + 180$$

$$\boxed{B'(x) = -45x^2 + 240x + 180}$$

4. Soit $x \in [0; 10]$. $B'(x) = 0 \iff -45x^2 + 240x + 180 = 0$.
Le discriminant vaut $\Delta = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000 > 0$. L'équation $B'(x) = 0$ admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-240 - \sqrt{90000}}{2 \times (-45)} = 6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-240 + \sqrt{90000}}{2 \times (-45)} = -\frac{2}{3}$$

Or, $x_2 \notin [0; 10]$. On en déduit ainsi le tableau de signe de $B'(x)$ et les variations de B :

x	0		6		10
signe de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de B	-1000	$\nearrow$	1160	$\searrow$	-2200

5. a) On voit alors sur le tableau de variations que le bénéfice maximal est réalisé pour une vente de $x = 6$ km de tissu.

b) Ce bénéfice maximal vaudra alors $\underline{B(x = 6) = 1160 \text{ euros}}$.

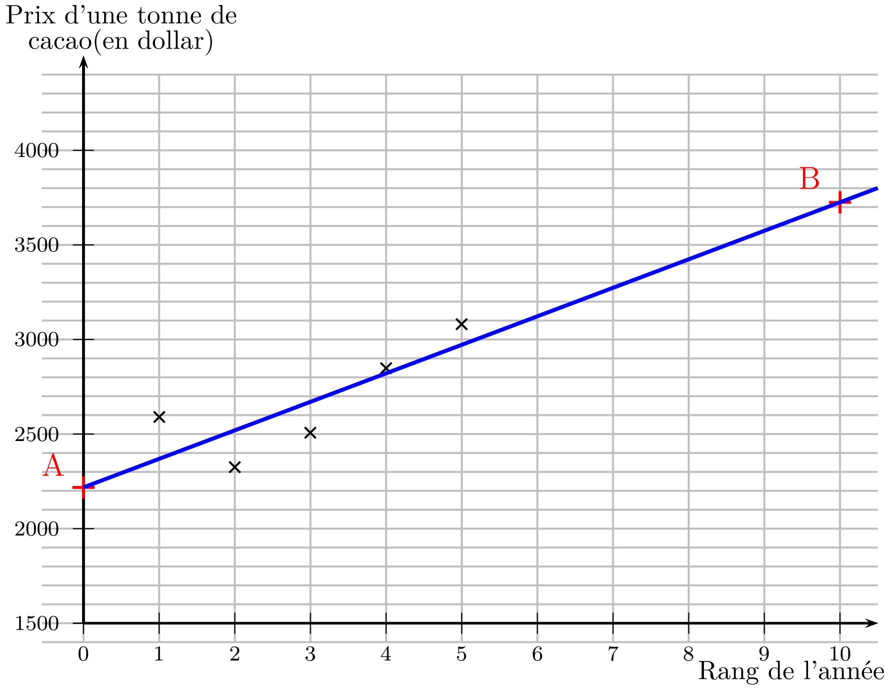
Exercice 4

Partie A

1. Avec la calculatrice, on trouve $\boxed{y = 150,65x + 2218,33}$.

2. On choisit d'ajuster par la droite (D) : $y = 150,7x + 2218,3$.

a) On trace alors cette droite, en plaçant deux points (par exemple $A(0; 2218,3)$ et $B(10; 3725,3)$) appartenant à la droite et en les reliant :



b) On peut alors, grâce à ce modèle, donner une estimation du prix moyen en 2020 : il sera de $150,7 \times 10 + 2218,3 = 3725,3$ dollars.

Partie B

1. u_0 correspond au prix moyen en 2015, c'est-à-dire $\underline{u_0 = 3081,45}$. Ensuite, on sait que ce prix moyen augmente de 4 % par an. Alors $u_1 = u_0 + 0,04u_0 = 1,04u_0 = 1,04 \times 3081,45$. $\underline{u_1 = 3204,708}$.

2. Si on note u_n (n entier) le prix moyen à l'année n, alors $u_n + 1 = u_n + 0,04u_n = 1,04u_n$. La suite (u_n) est donc bien géométrique, de raison $\underline{q = 1,04}$.

3. On en déduit alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = 3081,45 \times 1,04^n}$$

4. On aura alors, en 2020 ($n = 2015-2020 = 5$), un prix moyen de $u_5 = 3081,45 \times 1,04^5 \underline{= 3749,05}$ dollars par tonne.

5. Lorsqu'on fait tourner cet algorithme, il affiche en sortie $n = 7$. Cela signifie qu'au premier janvier de l'année 2022 ($= 2015 + 7$), le prix moyen d'une tonne de cacao aura dépassé 4000 dollars.

* *
*

Proposé par T. Prévost (thomas.prevost@protonmail.com) pour le site https://www.sujetdebac.fr/