Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Obligatoire Série S – Amérique du Nord

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A – Démonstration préliminaire

1. Pour savoir si $G(t)$ est une des primitives de la fonction $g(t)$, il suffit de vérifier $G'(t) = g(t)$.

$$G(t)' = -1 \times e^{-0,2t} + (-t - 5) \times (-0,2)e^{-0,2t}$$

$$G(t)' = (-1 + 0,2t + 0,2 \times 5)e^{-0,2t}$$

$$G(t)' = 0,2te^{-0,2t}$$

$$G'(t) = g(t)$$

Par conséquent on peut dire que $G(t)$ est une primitive de $g(t)$.

2. D'après l'énoncé et la question **1.** On déduit que :

$$\int_0^x g(t)dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0)$$

$$G(x) = (-x - 5)e^{-0,2x}$$

$$G(0) = (0 - 5)e^{-0,2\times 0}$$

$$\int_0^x g(t)dt = (-x - 5)e^{-0,2x} + 5$$

$$\int_0^x g(t)dt = -\,xe^{-0,2x} - 5e^{-0,2x} + 5$$

De plus, on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-0,2x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)dt = \lim_{x\to+\infty} (-x - 5)e^{-0,2x} + 5 = E(X) = 5$$

L'espérance de X est bien égale à 5.

Partie B – Etude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

1. Afin de trouver σ nous allons centrer et réduire T pour former la variable Z.

$$Z = \frac{T - 40}{\sigma}$$

$$p(T < 10) = 0{,}067$$

$$p(T - 40 < 10 - 40) = 0{,}067$$

$$p\left(\frac{T - 40}{\sigma} < \frac{10 - 40}{\sigma}\right) = 0{,}067$$

$$p\left(Z < \frac{10 - 40}{\sigma}\right) = 0{,}067$$

$$p\left(Z < \frac{-30}{\sigma}\right) = 0{,}067$$

D'après la calculatrice :

STAT → DIST → NORM → InvN → $InvN(0{,}067,\ 1, 0)$

$$\frac{-30}{\sigma} \approx -1{,}4985$$

$$\sigma \approx 20{,}0198$$

L'écart-type est d'environ 20 minutes et 1 seconde (car 0,0198 x 60 = 1,2 ≈ 1).

2. On cherche $p(T \geq 60) = 1 - (T < 60)$

D'après la calculatrice :

STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0\ ,\ 60\ ,\ 20{,}0198\ ,\ 40) \approx 0{,}1587$

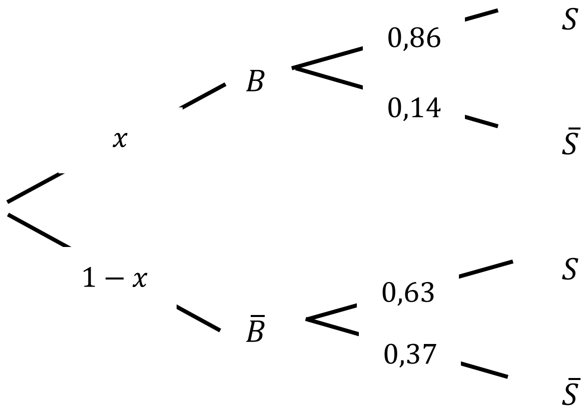
Il y a 15,87% de chance que les clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

Partie C – Durée d'attente pour le paiement

1. a) Si la variable suit une loi exponentielle cela signifie que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ donc $E(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5$. La durée moyenne d'attente au borne automatique est de 5 minutes.

b) On cherche $p(X > 10) = e^{-0{,}2\times10} \approx 0{,}135$. Un client attend plus de 10 minutes dans 13,5% des cas.

2. On note $p(B) = x$



D'après la formule des probabilités totales :

$$p(S) = p(S \cap B) + p(S \cap \bar{B})$$

$$p(S) = 0{,}86x + 0{,}63(1 - x)$$

On veut $p(S) > 0{,}75$ donc $\quad 0{,}86x + 0{,}63(1 - x) > 0{,}75$

$$0{,}23x > 0{,}12$$

$$x > \frac{12}{23} \approx 0{,}52$$

Pour qu'il est au minimum au 75% des clients qui attendent moins de 10 minutes, la probabilité minimale de clients devant passer aux caisses automatiques est environ à 52%.

Partie D – Bons d'achat

1. La distribution des cartes aux clients se fait de manière aléatoire, de plus on sait grâce à l'énoncé que les cartes sont gagnantes à 0,5%. Pour un montant d'achats de 158,02€, cela correspond à un tirage au sort est répété 15 fois de manières indépendantes avec une probabilité de succès de 0,5%. On suppose Y la variable aléatoire qui représente le nombre de cartes gagnantes. Par conséquent, on peut considérer que la variable Y suit une loi binomiale telle que $\mathcal{B}(15; 0{,}005)$.

Grâce à cette loi on sait que :

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$$
$$p(Y \geq 1) = 1 - \binom{15}{0} 0{,}005^0 \times 0{,}995^{15}$$
$$p(Y \geq 1) = 1 - 0{,}995^{15}$$
$$p(Y \geq 1) \approx 0{,}072$$

La probabilité que le client ait au moins une carte gagnante est environ de 0,07, soit 7%.

2. Pour trouver la valeur à partir de laquelle il y à 50% de chance d'avoir une carte gagnante, il faut résoudre l'équation suivante :

$$p(Y \geq 1) \geq 0{,}5$$

$$1 - \binom{x}{0} 0{,}005^0 \times 0{,}995^x \geq 0{,}5$$

$$1 - 0{,}995^x \geq 0{,}5$$

$$-0{,}995^x \geq -0{,}5$$

$$0{,}995^x \leq 0{,}5$$

$$x \ln(0{,}995) \leq \ln(0{,}5)$$

$$x \geq \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)} \quad \text{car} \quad \ln(0{,}99) < 0$$

$$x \geq 138{,}3$$

$$x \geq 139 \quad \text{car } x \text{ doit être un entier}$$

Pour que le client ait plus d'une chance sur deux de gagner à partir des cartes distribuées, il faudrait jouer avec au moins 139 cartes, soit un montant d'achats au minimum de 1 390€.

EXERCICE 2 (4 points)

1. Il faut construire le tableau de variation de f à partir de sa dérivée $f'(x)$.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-bx + b - 2}{1 - x} = 0$$

Un quotient est nul si son numérateur est nul, donc :

$$-bx + b - 2 = 0$$

$$b(1 - x) = 2$$

$$1 - x = \frac{2}{b}$$

$$x = 1 - \frac{2}{b} = \frac{b - 2}{b}$$

x	0	$\frac{b-2}{b}$	1
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variation de $f(x)$	0 $\nearrow$	$b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$	$\searrow$ $\Vert$

Car $f(0) = b \times 0 + 2\ln(1-0) = 0$

Et $f\left(\frac{b-2}{b}\right) = b \times \frac{b-2}{b} + 2\ln\left(1-\left(\frac{b-2}{b}\right)\right) = b-2+2\ln\left(\frac{b-b+2}{b}\right) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$

Le maximum de $f(x)$ est atteint au point $\left(\left(\frac{b-2}{b}\right); \left(b-2+2\ln\frac{2}{b}\right)\right)$.

2. On cherche :

$$b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leq 1{,}6$$

On note : $g(b) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$

$g(b) = b-2+2\ln 2 - 2\ln b$ car $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$g'(b) = 1-\frac{2}{b}$

On veut construire un tableau de signe, par conséquent on cherche : $g'(b) > 0$

$$1-\frac{2}{b} > 0$$

$$\frac{2}{b} < 1$$

$$b > 2$$

La fonction $g(b)$ existe uniquement si b est supérieur ou égale à 0 car la fonction logarithme est défini uniquement sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b	2	α	$+\infty$
Signe de $g'(b)$	0	$+$	
Variation de $g(b)$	0 $\nearrow$	$1{,}6$	$\nearrow$

La fonction $g(b)$ est donc croissante sur $[2;+\infty[$. Le calcul de $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b)$ étant trop complexe, on se place sur l'intervalle [2;10] avec $g(10) = 8 - 2ln5 \approx 4{,}78$

On remarque que $g(b)$ est continue, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[2; 10]$. De plus $0 < 1{,}6 < 4{,}78$ donc $g(2) < g(\alpha) < \mathrm{g}(10)$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α tel que $g(\alpha) = 1{,}6$. D'après la calculatrice, la solution est $\alpha \approx 5{,}69$.

3. D'après l'énoncé $f'(x) = \frac{-5{,}69x+3{,}69}{1-x}$, on cherche $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$.

Or $f'(0) = 3{,}69$ et $f(0) = 0$. Donc on obtient $y = 3{,}69x$.

Par conséquent, il existe un triangle rectangle, à partir des points suivants : $(0; 0)$, $(1; 0)$, et $(1, 3{,}69)$. Donc, le côté adjacent à l'angle θ qui mesure 1 et le côté opposé 3,69. On obtient :

$$\tan\theta = \frac{3{,}69}{1} = 3{,}69$$

$$\arctan(3{,}69) \approx 74{,}8°$$

L'angle de tir est de 74,8°.

EXERCICE 3 (5 points)

1.a) On cherche l'équation paramétrique de la droite (AB) passant par A, et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 10k \\ y = -8k \\ z = 2k \end{cases}$$

On cherche l'équation paramétrique de la droite (CD) passant par C, et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 14-(-1) \\ 4-(-8) \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = -1 + 15k' \\ y = -8 + 12k' \\ z = 5 + 3k' \end{cases}$$

1.b) On veut si savoir (AB) et (CD) sont coplanaires. Si elles sont sécantes, on devrait avoir :

$$\begin{cases} 10k = -1 + 15k' \\ -8k = -8 + 12k' \\ 2k = 5 + 3k' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10k = -1 + 15k' \\ -8k = -8 + 12k' \\ 10k = 25 + 15k' \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 du système ci-dessus sont incompatible, ce système n'a pas de solution. Par conséquent (AB) et (CD) ne sont pas sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.

2.a) Pour I qui est sur (AB) on sait que :

$$\begin{cases} x = 10k \\ y = -8k \text{ et } x = 5 \\ z = 2k \end{cases}$$

$10k = 5$ donc $k = 0{,}5$

Alors,

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -8 \times 0{,}5 = -4 \\ z = 2 \times 0{,}5 = 1 \end{cases}$$

$I(5; -4; 1)$

Pour J qui est sur (CD) on sait que :

$$\begin{cases} x = -1 + 15k' \\ y = -8 + 12k' \text{ et } x = 4 \\ z = 5 + 3k' \end{cases}$$

$x = -1 + 15k' = 4 \quad$ donc $k' = 1/3$

Alors,

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -8 + 12 \times \dfrac{1}{3} = -4 \\ z = 5 + 3 \times \dfrac{1}{3} = 6 \end{cases}$$

$J(4; -4; 6)$

La distance IJ est donc : $IJ = \sqrt{(4-5)^2 + \left(-4-(-4)\right)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{1+0+25} = \sqrt{26}$

2.b) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$, de plus $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 4-(-4) \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Pour montrer que des droites sont perpendiculaires, on peut calculer le produit scalaire des vecteurs.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = 10 \times (-1) + (-8) \times 0 + 2 \times 5 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux, ce qui signifie que les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = 15 \times (-1) + 12 \times 0 + 3 \times 5 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux, ce qui signifie que les droites (CD) et (IJ) sont perpendiculaires.

3.a) On sait que le point I appartient à (AB). (AB) et (CD) n'étant pas coplanaire, par conséquent I n'appartient pas à (CD). Les points C, D et I définissent un plan, le plan (CDI).

De plus J est un point de la droite (CD) donc il appartient au plan (CDI).

On sait aussi que Δ passe par I est qu'elle est parallèle à (CD), par conséquent Δ appartient au plan (CDI).

Ajoutons que (CD) est perpendiculaire à (IJ), toutes les droites étant parallèles à (IJ) seront orthogonal à la droite (CD), ce qui implique qu'elles seront sécantes.
Donc, la parallèle à la droite (IJ)passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

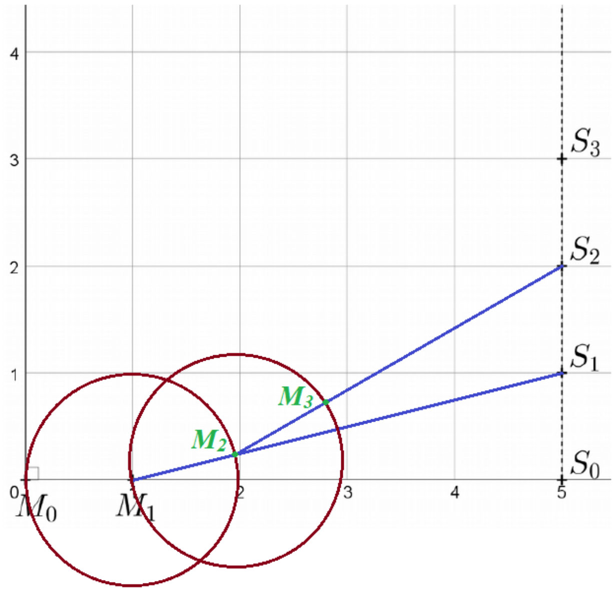
3.b) D'après la question précédente on a des droites (IJ) et $(M'P)$ sont par parallèles, ce qui implique que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires. On peut en déduire que le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IP}$, et donc que les droites $(M'P)$ et Δ sont perpendiculaires.
Les droites (AB) et (CD) sont sécantes, donc Δ et (AB) sont sécantes, puisque Δ et (CD) sont parallèles.
Δ et (AB) sont sécantes en I et forment les plan (IMP).
On peut donc dire que le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (IMP).
Donc, il existe un triangle MPM' est ainsi rectangle en P.

3.c) Dans tous les triangles rectangles, le côté le plus long est l'hypoténuse, par conséquent $MM' > M'P$. Or $IJ = M'P$ car $IJM'P$ forme un parallélogramme. Donc on peut dire que $MM' > IJ$.
On a montré que pour tout point quelconque M, appartenant à (AB)), et M',appartenant à (CD) alors $MM' > IJ$, ce qui signifie que IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A – Modélisation à l'aide d'une suite

1.



2. $d_0 = M_0S_0 = \sqrt{(5-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$

$d_1 = M_1S_1 = \sqrt{(5-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

3. On cherche à déterminer une équation de la droite (M_1S_1), sachant qu'une équation de droite est de la forme : $y = ax + b$ avec a le coefficient de la droite et b l'ordonnée à l'origine. On a $M_1(1; 0)$ et $S_1(5; 1)$.

$$a = \frac{1-0}{5-1} = \frac{1}{4}$$

Donc $y = \frac{1}{4}x + b$, d'après M_1 :

$$0 = \frac{1}{4} + b$$

$$b = -\frac{1}{4}$$

Par conséquent, l'équation de la droite (M_1S_1) est $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ou $y = \frac{1}{4}(x-1)$.

Si on suppose $x = 1 + \frac{4}{\sqrt{17}}$ alors $y = \frac{1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ donc on obtient un point de coordonnées $\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

Il nous reste à vérifier que la distance de M_1 et ce point est bien égale à 1.

$$\sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{17} + \frac{1}{17}} = 1$$

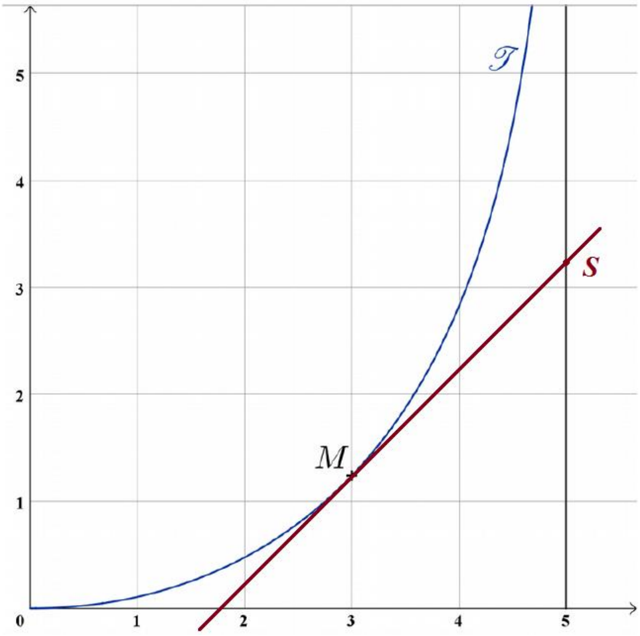
On peut dire qu'il existe un point $M_2\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}}; \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4.a) Afin de remplir le tableur il faut écrire :
En C5 : $= C4 + (A4 - C4)/F4$
En F5 : $= RACINE((D5 - B5)\char`^2 + (E5 - C5)\char`^2)$

4.b) La suite d_n est décroissante et minorée par 0 (car une distance est nécessairement positive). Par conséquent, la suite d_n est convergente. D'après le tableur, on peut conjecturer que sa limite est sans doute la valeur 2,7731658.

Partie B – Modélisation à l'aide d'une fonction

1.a)



Le graphique étant construit à l'échelle, il est possible de lire les coordonnées de S directement sur le graphique. On note que S semble avoir les coordonnées suivantes $(5; 3{,}3)$.

1.b) On cherche l'équation de la tangente au point d'abscisse 3 : $y = f'(3) \times (x - 3) + f(3)$.

$$f(3) = -2{,}5\ln(1 - 0{,}2 \times 3) - 0{,}5 \times 3 + 0{,}05 \times 3^2$$

$$f(3) = -2{,}5\ln(0{,}4) - 1{,}05 \approx 1{,}24$$

$$f'(3) = \frac{3 \times (1 - 0{,}1 \times 3)}{5 - 3} = \frac{3 \times 0{,}7}{2} = 1{,}05$$

$$y = 1{,}05 \times (x - 3) + 1{,}24$$

$$y = 1{,}05x - 3{,}15 + 1{,}24$$

$$y = 1{,}05x - 1{,}91$$

On est sûr que pour le point S on a $x = 5$. Donc :

$$y = 1{,}05 \times 5 - 1{,}91 = 3{,}34$$

Par conséquent, on sait que $S(5; 3{,}34)$. L'ordonnée du point S est 3,34.

2. $\lim_{x \to 5} d(x) = \lim_{x \to 5} 0,1x^2 - x + 5 = 0,1 \times 25 - 5 + 5 = 2,5$

La valeur limite de la distance MS est de 2,5.