Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Obligatoire Série S – Polynésie

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

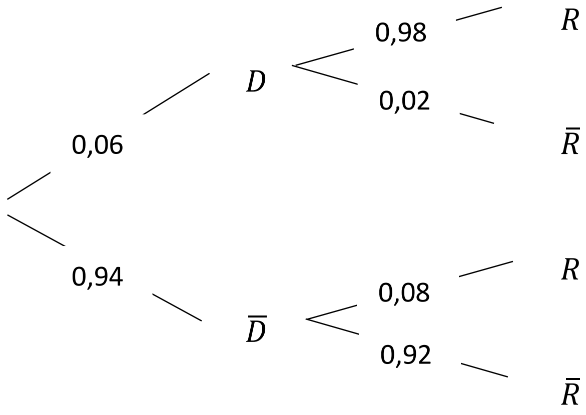
L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. Arbre de probabilités :



D'après la formule des probabilités totales :

$$p(R) = p(D \cap R) + p(\overline{D} \cap R)$$
$$p(R) = 0,6 \times 0,98 + 0,94 \times 0,08 = 0,134$$

La probabilité que le DVD soit retiré du stock est bien de 13,4%.

2. On cherche $p_R(D)$. Pour cela on utilise la formule suivante :

$$p_R(D) = \frac{p(D \cap R)}{p(R)}$$

$$p_R(D) = \frac{0,06 \times 0,98}{0,134} \approx 0,44$$

Or $0,44 < 0,50$, ce qui nous amène à dire que l'affirmation est fausse. Parmi les DVD retirés, environ 44% sont des DVD défectueux.

Partie B

Pour savoir si on peut accepter ou rejeter l'hypothèse, il faut calculer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

On sait que $n = 150$, $p = 0,06$ et $1 - p = 0,94$.

On vérifie que $n \geq 30$, $np = 9 \geq 5$ et $n(1-p) = 141 \geq 5$.

$$I_{150} = \left[0,06 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}\ ; 0,06 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}\right]$$

$$I_{150} \approx [0{,}021\ ;\ 0{,}099]$$

De plus, $f = \frac{14}{150} \approx 0{,}093$ donc $f \in I_{150}$. Par conséquent, l'hypothèse doit être acceptée : dans cette médiathèque, 6% des DVD sont défectueux.

Partie C

1. On suppose Z la variable centrée réduite de X. Autrement dit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$p(X \geq 92) = 0{,}1$$

$$p(X - 80 \geq 92 - 80) = 0{,}1$$

$$p\left(\frac{X-80}{\sigma} \geq \frac{12}{\sigma}\right) = 0{,}1$$

$$p\left(\frac{X-80}{\sigma} \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}1$$

$$p\left(Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0{,}9$$

A l'aide de la calculatrice, on trouve : STAT → DIST → NORM → InvN → $InvN(0{,}9\ ,\ 0\ ,1)$

$$\frac{12}{\sigma} \approx 1{,}282$$

$$\sigma \approx \frac{12}{1{,}282} \approx 9{,}36$$

On trouve un écart type de 9,36 pour la variable X. Donc X suit une loi normale :

$$X \to \mathcal{N}(80\,;9{,}36).$$

2. On sait que 1h30 représente 90 minutes et 1h35 représente 95 minutes. On cherche :

$$p_{X\geq 90}(X \leq 95) = \frac{p(90 \leq X \leq 95)}{p(X \geq 90)}$$

Or $X \to \mathcal{N}(80\,;9{,}36)$ donc $p(X \geq 90) = 0{,}5 - p(80 \leq X \leq 90)$

$$p_{X\geq 90}(X \leq 95) = \frac{p(90 \leq X \leq 95)}{0{,}5 - p(80 \leq X \leq 90)}$$

A l'aide de la calculatrice on obtient :
STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(90\ ,\ 95\ ,\ 9{,}36\ ,\ 80) \approx 0{,}0882$

STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(80\ ,\ 90\ ,\ 9{,}36\ ,\ 80) \approx 0{,}3573$

$$p_{X\geq 90}(X \leq 95) = \frac{0{,}0882}{0{,}5 - 0{,}3573} \approx 0{,}6181$$

La probabilité que le film se termine avant 1h35 alors qu'il a déjà été vu 1h30 est approximativement de 62,81 %.

EXERCICE 2 (6 points)

Partie A – Modélisation de la forme de l'ampoule

1.a) On sait que $\sin(x)' = \cos(x)$. Donc :

$$f'(x) = b \times \frac{\pi}{4}\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$$

1.b) On remarque que la tangente au point B de coordonnées $(0; 1)$ est parallèle à l'axe des abscisses, autrement dit $f'(0) = 0$.

De plus $f'(x) = b \times \frac{\pi}{4}\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$ alors $f'(0) = b \times \frac{\pi}{4}\cos(c) = 0$. Or cette équation peut être résolu uniquement si $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On sait également que $c \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $c = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent $f(x) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$.

2. A partir du point B, on a $f(0) = 1$, on obtient :

$$f(0) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = 1$$
$$a + b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$a + b = 1$$

A partir du point C, on a $f(4) = 3$, on obtient :

$$f(4) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \times 4\right) = 3$$
$$a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3$$
$$a + b \times (-1) = 3$$
$$a - b = 3$$

On résout le système qui suit :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

Par addition : $2a = 4$

$a = 2$

Conclusion, si $a = 2$ alors $b = -1$.

Partie B – Approximation du volume de l'ampoule

1. Le volume d'un cylindre se calcule à partir de la formule suivante : $V_c = \pi \times rayon^2 \times hauteur$.

Ici, le rayon $OB = 1$, et la hauteur $AB = 1$ par conséquent $V_c = \pi$.
Le volume du cylindre de section le rectangle ABFG est de π unité de volume.

2. Le volume d'une sphère se calcule à partir de la formule suivante : $V_s = \frac{4}{3}\pi R^3$, par conséquent, on en déduit le volume d'une demi-sphère : $V_s' = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3$.
Ici, le rayon noté $R = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.
$V_s' = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 18\pi$.
Le volume de la demi-sphère est de 18π unités de volume.

3.a) Cas particulier

La fonction f permet de calculer le rayon, on cherche donc $f\left(2 \times \frac{4}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{8}{5}\right) \approx 1{,}691$.
Donc $V_3 = \pi \times 1{,}691^2 \times \frac{4}{5} = \frac{16\pi}{5} \approx 7{,}187$.
Le volume du troisième cylindre est de 7,187 unités de volume.

3.b) Cas général

$V \leftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $n - 1$:
    | $V \leftarrow V + \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times k \times \frac{4}{n}\right)\right)^2 \times \frac{4}{n}$
Fin Pour

EXERCICE 3 (4 points)

1. Les primitives de $f(x)$ sont : $F(x) = -e^{-kx} + K$ avec K une constante quelconque. Une primitive particulière est : $F(x) = -e^{-kx}$.

2. On a $BC = f(1) = ke^{-k}$. Par conséquent, l'aire du triangle OBC est $A_1 = \frac{ke^{-k}}{2}$.
Donc :

$$A_{\mathcal{D}} = \int_0^1 f(x)dx - A_1$$

$$A_{\mathcal{D}} = F(1) - F(0) - \frac{ke^{-k}}{2}$$

$$A_{\mathcal{D}} = 1 - e^{-k} - \frac{ke^{-k}}{2}$$

$$A_{\mathcal{D}} = 1 - \frac{(2 + k)e^{-k}}{2}$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est de $1 - \frac{(2+k)e^{-k}}{2}$.

3. On cherche :

$$1-\frac{(2+k)e^{-k}}{2}=ke^{-k}$$
$$1-e^{-k}-\frac{ke^{-k}}{2}=ke^{-k}$$
$$1-e^{-k}-\frac{3ke^{-k}}{2}=0$$

Pour faciliter les calculs, nous allons nommer cette fonction $g(k)=1-e^{-k}-\frac{3ke^{-k}}{2}$.
Nous allons calculer la dérivée afin de pourvoir construire un tableau de signe et par la suite un tableau de variations.

$$g'(k)=e^{-k}-\frac{3}{2}e^{-k}+\frac{3k}{2}e^{-k}$$
$$g'(k)=e^{-k}\times\left(1-\frac{3}{2}+\frac{3k}{2}\right)$$
$$g'(k)=e^{-k}\times\left(\frac{-1+3k}{2}\right)$$

Il nous faut résoudre : $g'(k)=0$.

$$e^{-k}\times\left(\frac{-1+3k}{2}\right)=0$$

Un produit est nul, si un des deux facteurs est nul, or $e^{-k}>0$.

$$\text{Donc } \left(\frac{-1+3k}{2}\right)=0$$

Un quotient est nul si le numérateur est nul.

$$-1+3k=0$$
$$k=\frac{1}{3}$$

On obtient le tableau de variation suivant avec les calculs ci-dessous :

k	0	$k=\frac{1}{3}$	$+\infty$
Signe de $g'(k)$	$-$	0	$+$
Variation de $g(k)$	$\Vert$ 0 ↘	$g(1/3)\approx -0{,}07$	↗ 1

$\lim\limits_{k\to 0^+} g(k)=0$

$\lim\limits_{k\to +\infty} g(k)=1$ car $\lim\limits_{k\to +\infty} e^{-k}=0$

$g\left(\frac{1}{3}\right)=1-e^{-\frac{1}{3}}-\frac{3\times\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}}{2}\approx -0{,}07$

On a une fonction $g(k)$ continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$.

De plus, $g\left(\frac{1}{3}\right) \approx -0{,}07$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} g(k) = 1$
L'équation $g(k) = 0$ possède donc une unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Par conséquent, il existe une solution unique qui permet de dire qu'il y a un réel k qui permet que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ soit le double de l'aire du triangle OCB.

EXERCICE 4 (5 points)

Partie A

1. Dans la cellule C3, il faut écrire $= 2 * B2/3 + C2/2 + 2 * D2/3$

2. Chacune des suites semble avoir une limite finie. On peut émettre la conjecture suivante :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0{,}214$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0{,}571$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0{,}214$$

Partie B :

1.a)

$$u_n = a_n - c_n$$
$$u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1}$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n - \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n\right)$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{3}c_n$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - \frac{1}{3}c_n$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - c_n)$$
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$$

u_n est une suite géométrique de raison $1/3$ et du premier terme 1, car $u_0 = a_0 - c_0 = 1$.

1.b) Par conséquent la suite est définie par $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2.a) Les suites a_n, b_n et c_n sont des suites qui représentent des probabilités, de plus, le lapin est obligé de choisir entre les 3 galeries proposées, c'est pourquoi on obtient : $a_n + b_n + c_n = 1$, donc $1 - b_n = a_n + c_n$.

Démonstration par récurrence :

- Initialisation

$v_0 = b_0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$

- Hérédité

On suppose que $v_n = b_n - \frac{4}{7}$

Alors

$$v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$$
$$v_{n+1} = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}v_n - \frac{2}{21}$$
$$v_{n+1} = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{4}{7}\right)$$
$$v_{n+1} = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}b_n$$
$$v_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7}$$
$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(1 - b_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7}$$
$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7}$$

car $a_n + b_n + c_n = 1$ donc $a_n + c_n = 1 - b_n$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n - \frac{4}{7}$$
$$v_{n+1} = b_{n+1} - \frac{4}{7}$$

Remarque :

Pour cette démonstration, il est plus facile d'effectuer le raisonnement en commençant par la fin.

- Conclusion

On peut donc conclure que pour tout n entier naturel, alors : $v_n = b_n - \frac{4}{7}$.

2.b) La suite v_n est géométrique de premier terme $v_0 = -\frac{4}{7}$ et de raison $-\frac{1}{6}$.

Par conséquent, pour tout n, on a :

$$v_n = -\frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

3. On sait que $b_n = v_n + \frac{4}{7}$, par conséquent :

$$\boldsymbol{b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n}$$

D'après les questions précédentes :

$$\begin{cases} a_n - c_n = u_n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \end{cases}$$

Par addition : $2a_n = u_n + 1 - b_n$

$$a_n = \frac{u_n + 1 - b_n}{2}$$

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 - \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{14} + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n}$$

De plus, $c_n = 1 - a_n - b_n$ donc :

$$c_n = 1 - \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{14} + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right] - \left[\frac{4}{7} - \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right]$$

$$c_n = 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{14} - \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n - \frac{4}{7} + \frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\boldsymbol{c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n}$$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{3}{14}$ car $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$ puisque $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ et $\frac{-1}{6} \in]-1; 1[$.

$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \frac{4}{7}$ car $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$ puisque $\frac{-1}{6} \in]-1; 1[$.

$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \frac{3}{14}$ car $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$ puisque $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ et $\frac{-1}{6} \in]-1; 1[$.

Après un grand nom d'étape, le lapin choisira la galerie A et C, 3 fois sur 14 et la galerie B sera choisie 4 fois sur 7. Ceci confirme notre conjecture émise dans la partie A, question 2.