Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Obligatoire Série S – Pondichéry

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la règlementation en vigueur.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. $T_0 = 1000$
$T_1 = 0{,}82 \times 1000 + 3{,}6 = 823{,}6$
$T_2 = 0{,}82 \times 823{,}6 + 3{,}6 = 678{,}952$
$T_3 = 0{,}82 \times 678{,}952 + 3{,}6 = 560{,}34064$
$T_4 = 0{,}82 \times 560{,}34064 + 3{,}6 \approx 463{,}079$
Au bout de 4 heures de refroidissement, le four sera à $463{,}1°C$.

2. Démonstration par récurrence :

- Initialisation

$T_0 = 0{,}82^0 \times 980 + 20 = 1000$

La propriété est vraie au rang 0.

- Hérédité

On suppose que $T_n = 0{,}82^n \times 980 + 20$
Alors, $T_{n+1} = 0{,}82 \times T_n + 3{,}6$
$= 0{,}82^{n+1} \times 980 + 0{,}82 \times 20 + 3{,}6$
$= 0{,}82^{n+1} \times 980 + 20$

- Conclusion

On peut donc conclure que pour tout n entier naturel, alors : $T_n = 0{,}82^n \times 980 + 20$

3.

$$T_n = 0{,}82^n \times 980 + 20 \leq 70$$
$$0{,}82^n \times 980 \leq 50$$
$$0{,}82^n \leq \frac{5}{98}$$
$$n \ln 0{,}82 \leq \ln \frac{5}{98}$$
$$n = \frac{\ln \frac{5}{98}}{\ln 0{,}82} \approx 14{,}99$$

Pour ouvrir le four sans risque pour la céramique, il faut attendre approximativement 15 heures.

Partie B

1.

$$f'(t) = -\frac{a}{5} e^{-\frac{t}{5}}$$
$$f'(0) = -\frac{a}{5}$$
$$f'(0) + \frac{1}{5} f(0) = -\frac{a}{5} + \frac{1}{5} \times 1000 = 4$$
$$\text{Donc } a = -5 \times \left(4 - \frac{1000}{5}\right) = 5 \times 196 = 980$$

$$\text{Par ailleurs } f(0) = a + b = 1000$$
$$\text{Donc } b = 1000 - a = 1000 - 980 = 20$$

A l'aide des données nous avons pu déterminer que $a = 980$ et $b = 20$.

2.a)

$$\lim_{t \to +\infty} -\frac{t}{5} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$$
$$\text{Et donc } \lim_{t \to +\infty} 980\, e^{-\frac{t}{5}} + 20 = 20$$

2.b) $f'(t) = -\frac{980}{5} e^{-\frac{t}{5}} = -196\, e^{-\frac{t}{5}} < 0$ car $e^x > 0$

Par conséquent :

t	0	$+\infty$
$f(t)$	1000	20

La fonction $f(t)$ est strictement décroissante.

2.c)

$$f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leq 70$$
$$980e^{-\frac{t}{5}} \leq 50$$
$$e^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{5}{98}$$
$$-\frac{t}{5} \leq \ln\frac{5}{98}$$
$$t \geq -5\ln\frac{5}{98} = 14{,}878$$

Car la division ou la multiplication par un nombre négatif change le sens de l'inégalité

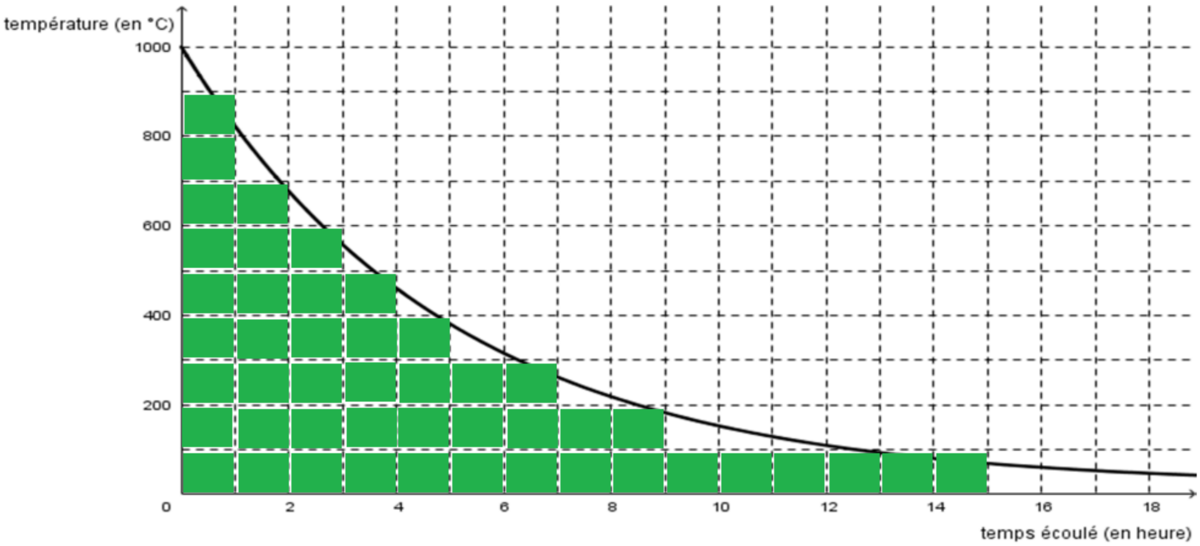
Or $60t \geq 892{,}66$

Donc le four peut être ouvert sans risque aux alentours de 893 minutes, soit 14 heures et 53 minutes.

3.a) On cherche à résoudre :

$$\frac{1}{15-0}\int_0^{15} f(t)dt$$

On va donc chercher l'aire sous la courbe entre 0 et 15, et par la suite le diviser par 15.



Sous la courbe on observe environ 47 carreaux, chaque carreau représente $1 \times 100 = 100$. Par conséquent :

$$\int_0^{15} f(t)dt \approx 47 * 100 = 4700$$

$$\frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)dt \approx \frac{4700}{15} \approx 313$$

La température moyenne est approximativement de 313°C.

3.b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)dt &= \frac{1}{15}\int_0^{15}\left(980e^{-\frac{t}{5}} + 20\right)dt \\ &= \frac{1}{15}\left[980 \times (-5)e^{-\frac{t}{5}} + 20t\right]_0^{15} \\ &= \frac{1}{15}\left[-4900e^{-\frac{t}{5}} + 20t\right]_0^{15} \\ &= \frac{1}{15}(-4900(e^{-3} - 1) + 20 \times 15) \\ &\approx 330{,}4\end{aligned}$$

En arrondissant à l'unité près, la température moyenne est de 330°C.

4.a)

$$\begin{aligned}d(t) &= f(t) - f(t+1) \\ &= 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 - \left(980e^{-\frac{t+1}{5}} + 20\right) \\ &= 980 \times \left(e^{-\frac{t}{5}} - e^{-\frac{t}{5}}e^{-\frac{1}{5}}\right) \\ &= 980e^{-\frac{t}{5}} \times \left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right)\end{aligned}$$

4.b) $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 0$ car $\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u} = 0$

L'écart de température entre les heures va diminuer progressivement jusqu'à disparaitre (puisque égale à 0). Ce qui signifie que la température du four va se stabiliser.

EXERCICE 2 (4 points)

1.a)

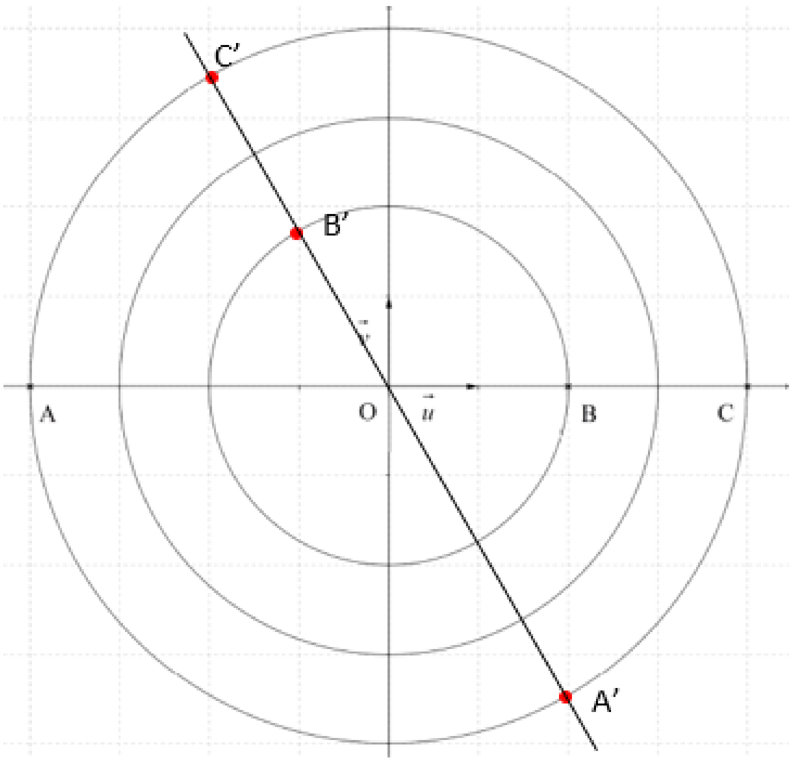
On a $|j| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

Donc $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

On en déduit a', b' et c' :

$$a' = ja = -4e^{\frac{2i\pi}{3}} = 4e^{\frac{5i\pi}{3}} = 2 - 2i\sqrt{3}$$
$$b' = jb = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$$
$$c' = jc = 4e^{\frac{2i\pi}{3}} = -2 + 2i\sqrt{3}$$

1.b)



2. A, B, et C sont alignés sur l'axe des abscisses, $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$ réel. De plus :

$$\frac{z_{\overrightarrow{A'B'}}}{z_{\overrightarrow{A'C'}}} = \frac{b'-a'}{c'-a'} = \frac{j(b-a)}{j(c-a)} = \frac{b-a}{c-a} = \frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}$$

$\frac{z_{\overrightarrow{A'B'}}}{z_{\overrightarrow{A'C'}}}$ est également un réel.
Par conséquent on peut conclure que A', B' et C' sont alignés.

3. Puisque MNP est isocèle on cherche à démontrer qu'il a 2 côtés de même taille.
P est le milieu de $[AC']$: $p = \frac{a+c'}{2} = \frac{-4+4j}{2} = -2+2j$
M est le milieu de $[A'C]$: $m = \frac{a'+c}{2} = \frac{4-4j}{2} = 2-2j$
N est le milieu de $[CC']$: $n = \frac{c+c'}{2} = \frac{4+4j}{2} = 2+2j$
$PN = |p-n| = |-2+2j-(2+2j)| = |4j-4|$
$NM = |n-m| = |2+2j-(2-2j)| = |4j-4|$
$PN = NM$, le triangle MNP est bien un triangle isocèle en N.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie A

1.a) Calculatrice Casio 35+ : STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0\ ,\ \ 0{,}2\ \ ,0{,}21, 0{,}58)$
$p(X_U < 0{,}2) \approx 0{,}035$

De même : STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0{,}5\ ,\ \ 0{,}8\ ,\ \ 0{,}21\ \ ,0{,}58)$
$p(0{,}5 \leq X_u < 0{,}8) \approx 0{,}501$

1.b) $1800 \times 0{,}035 \approx 63$. Les différents tamis permettent de récupérer 63g de sucre extra fin.
$1800 \times 0{,}501 \approx 901{,}8$. Il y a 901,8 grammes de sucre sur le tamis 2.

2.

$$p(0{,}5 < X_V < 0{,}8) = 0{,}4$$
$$p\left(-\frac{0{,}15}{\sigma_V} < \frac{X_V - 0{,}65}{\sigma_V} < \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}4$$
$$p\left(\frac{X_V - 0{,}65}{\sigma_V} \leq -\frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}3$$
$$p\left(\frac{X_V - 0{,}65}{\sigma_V} \leq \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}7$$

La calculatrice nous donne $\frac{0,15}{\sigma_V} \approx 0,5244$

Donc $\sigma_V \approx 0,286$

Et donc $V \sim N(0,65\,, 0,286^2)$

Partie B

1.a) D'après la formule de probabilité totale :

$$P(E) = P(U)P_U(E) + P(V)P_V(E)$$
$$P(E) = 0,3 \times 0,03 + 0,7 \times 0,05 = 0,044$$

Il y a 4,4% de chance que le paquet porte le label sucre « extra fin ».

1.b)

$$P_E(U) = \frac{P(U \cap E)}{P(E)} = \frac{0,009}{0,044} \approx 0,205$$

Sachant que le paquet porte le label sucre « extra fin », il y a 20,5% que ce sucre viennent de l'exploitation U.

2. On appelle u comme la proportion de paquet venant de l'exploitation U.

On sait que $P(E) = u \times 0,03 + (1-u) \times 0,05 = 0,05 - 0,02u$

Donc $P_E(U) = \frac{0,03u}{P(E)} = \frac{0,03u}{0,05-0,02u} = 0,3$

$$0,03u = 0,015 - 0,006u$$
$$0,036u = 0,015$$
$$u = \frac{0,015}{0,036} \approx 0,417$$

Pour avoir 30% de paquet de sucre label « extra fin », il faudrait 41,7% de paquets de l'exploitation U. Et par conséquent 59,3% de paquet de l'exploitation V.

Partie C

1. $n = 150, p = 0,3$

Intervalle de fluctuations asymptotique de paquet provenant de l'exploitation U :

$$\left[0,3 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{150}} ; 0,3 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{150}}\right] \approx [0,23; 0,37]$$

$$f = \frac{30}{150} = 0,2$$

La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuations, par conséquent l'acheteur a raison de remettre en cause l'annonce de l'entreprise.

2. $n = 150$, $f = 0{,}42$
Intervalle de confiance de la proportion de paquets provenant de l'exploitation U :

$$\left[0{,}42 - \frac{1}{\sqrt{150}} ; 0{,}42 + \frac{1}{\sqrt{150}}\right] \approx [0{,}338; 0{,}502]$$

EXERCICE 4 (5 points)

1. $C(0; 3; 2)$ et $D(4; 3; -2)$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-3 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(CD): \begin{cases} x = 0 + 4t = 4t \\ y = 3 + 0t = 3 \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

2.a)

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 4t-4 \\ 3-(-1) \\ 2-4t-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t-4 \\ 4 \\ 2-4t \end{pmatrix}$$

$$BM = \sqrt{(4t-4)^2 + 4^2 + (2-4t)^2}$$

On cherche à minimiser BM, ce qui revient à minimiser BM^2

$$BM^2 = (4t-4)^2 + 4^2 + (2-4t)^2$$

$$BM^2 = (4t)^2 - 2 \times 4t \times 4 + 16 + 16 + 4 - 2 \times 2 \times 4t + (4t)^2$$

$$BM^2 = 32t^2 - 48t + 36$$

$$BM^2 = 2(4t-3)^2 + 18$$

$$4t - 3 = 0$$

$$t = \frac{3}{4}$$

$$M: \begin{cases} x = 4 \times \dfrac{3}{4} = 3 \\ y = 3 \\ z = 2 - 4 \times \dfrac{3}{4} = -1 \end{cases}$$

La distance BM est minimal lorsque $t = \frac{3}{4}$
Par conséquent le point correspondant est $M(3; 3; \ -1)$.

2.b) $B(4;-1;0)$ et $H(3;3;-1)$

$$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 3-(-1) \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD} = -1 \times 4 + 4 \times 0 + (-1) \times (-4) = 0$$

On peut conclure que $(BH) \perp (CD)$.

2.c) D'après les précédentes questions, on sait que le triangle BCD est un triangle rectangle.

$CD = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$
$BH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{CD \times BH}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 12$$

L'aire du triangle BCD est bien de 12cm².

3.a) $B(4;-1;0)$ et $C(0;3;2)$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 3-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}.\vec{n} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times 2 = 0$$

De plus,

$$\overrightarrow{CD}.\vec{n} = 4 \times 2 + 0 \times 1 + (-4) \times 2 = 0$$

On peut donc dire que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (BCD), car il est normal à 2 vecteurs non colinéaire du plan.

3.b) On utilise les coordonnées du vecteur normal au plan (BCD) :

$$2x + y + 2z + d = 0$$

Pour déterminer d, on utilise les coordonnées d'un point qui appartient au plan, par exemple B :

$$2 \times 4 + (-1) + 2 \times 0 + d = 0$$
$$d = -7$$
$$(BCD): 2x + y + 2z - 7 = 0$$

3.c) La droite Δ est dirigée par le vecteur $\vec{n}$:

$$\Delta : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$$

3.d) Pour trouver les coordonnées du point d'intersection entre la droite Δ et le plan (BCD), il suffit de combiner l'équation cartésienne du plan avec la représentation paramétrique de la droite :

$$2(2t+2)+(t+1)+2(2t+4)-7=0$$
$$4t+4+t+1+4t+8-7=0$$
$$9t+6=0$$
$$t=-\frac{2}{3}$$

$$I\ :\ \begin{cases} x=2+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3} \\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ z=4+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3} \end{cases}$$

Le point d'intersection I a bien des coordonnées $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. $[AI]$ est une hauteur du tétraèdre $ABCD$ par conséquent :

$$\overrightarrow{IA}=\frac{2}{3}\vec{n}$$
$$IA=AI=\frac{2}{3}\sqrt{2^2+1^2+2^2}=2$$
$$\mathcal{V}_{ABCD}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{BCD}\times AI=\frac{1}{3}\times 12\times 2=8$$

Le volume du tétraèdre $ABCD$ est de 8cm^3.