Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Spécialité Série S – Amérique du Nord

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A – Démonstration préliminaire

1. Pour savoir si $G(t)$ est une des primitives de la fonction $g(t)$, il suffit de vérifier $G'(t) = g(t)$.

$$G(t)' = -1 \times e^{-0,2t} + (-t-5) \times (-0,2)e^{-0,2t}$$

$$G(t)' = (-1 + 0,2t + 0,2 \times 5)e^{-0,2t}$$

$$G(t)' = 0,2te^{-0,2t}$$

$$G'(t) = g(t)$$

Par conséquent on peut dire que $G(t)$ est une primitive de $g(t)$.

2. D'après l'énoncé et la question **1.** On déduit que :

$$\int_0^x g(t)dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0)$$

$$G(x) = (-x-5)e^{-0,2x}$$

$$G(0) = (0-5)e^{-0,2\times 0}$$

$$\int_0^x g(t)dt = (-x-5)e^{-0,2x} + 5$$

$$\int_0^x g(t)dt = -\,xe^{-0,2x} - 5e^{-0,2x} + 5$$

De plus, on sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-0,2x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)dt = \lim_{x\to+\infty} (-x-5)e^{-0,2x} + 5 = E(X) = 5$$

L'espérance de X est bien égale à 5.

Partie B – Etude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

1. Afin de trouver σ nous allons centrer et réduire T pour former la variable Z.

$$Z = \frac{T - 40}{\sigma}$$

$$p(T < 10) = 0{,}067$$

$$p(T - 40 < 10 - 40) = 0{,}067$$

$$p\left(\frac{T - 40}{\sigma} < \frac{10 - 40}{\sigma}\right) = 0{,}067$$

$$p\left(Z < \frac{10 - 40}{\sigma}\right) = 0{,}067$$

$$p\left(Z < \frac{-30}{\sigma}\right) = 0{,}067$$

D'après la calculatrice :

STAT → DIST → NORM → InvN → $InvN(0{,}067,\ 1, 0)$

$$\frac{-30}{\sigma} \approx -1{,}4985$$

$$\sigma \approx 20{,}0198$$

L'écart-type est d'environ 20 minutes et 1 seconde (car 0,0198 x 60 = 1,2 ≈ 1).

2. On cherche $p(T \geq 60) = 1 - (T < 60)$

D'après la calculatrice :

STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(0\ ,\ 60\ ,\ 20{,}0198\ ,\ 40) \approx 0{,}1587$

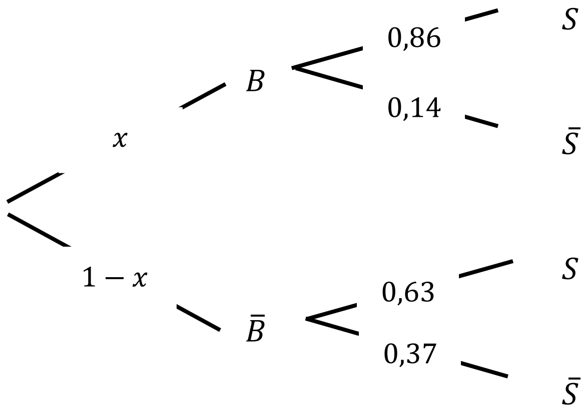
Il y a 15,87% de chance que les clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

Partie C – Durée d'attente pour le paiement

1. a) Si la variable suit une loi exponentielle cela signifie que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ donc $E(X) = \frac{1}{0{,}2} = 5$. La durée moyenne d'attente au borne automatique est de 5 minutes.

b) On cherche $p(X > 10) = e^{-0{,}2\times 10} \approx 0{,}135$. Un client attend plus de 10 minutes dans 13,5% des cas.

2. On note $p(B) = x$



D'après la formule des probabilités totales :

$$p(S) = p(S \cap B) + p(S \cap \bar{B})$$

$$p(S) = 0{,}86x + 0{,}63(1 - x)$$

On veut $p(S) > 0{,}75$ donc $\quad 0{,}86x + 0{,}63(1 - x) > 0{,}75$

$$0{,}23x > 0{,}12$$

$$x > \frac{12}{23} \approx 0{,}52$$

Pour qu'il est au minimum au 75% des clients qui attendent moins de 10 minutes, la probabilité minimale de clients devant passer aux caisses automatiques est environ à 52%.

Partie D – Bons d'achat

1. La distribution des cartes aux clients se fait de manière aléatoire, de plus on sait grâce à l'énoncé que les cartes sont gagnantes à 0,5%. Pour un montant d'achats de 158,02€, cela correspond à un tirage au sort est répété 15 fois de manières indépendantes avec une probabilité de succès de 0,5%. On suppose Y la variable aléatoire qui représente le nombre de cartes gagnantes. Par conséquent, on peut considérer que la variable Y suit une loi binomiale telle que $\mathcal{B}(15; 0{,}005)$.

Grâce à cette loi on sait que :

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$$
$$p(Y \geq 1) = 1 - \binom{15}{0} 0{,}005^0 \times 0{,}995^{15}$$
$$p(Y \geq 1) = 1 - 0{,}995^{15}$$
$$p(Y \geq 1) \approx 0{,}072$$

La probabilité que le client ait au moins une carte gagnante est environ de 0,07, soit 7%.

2. Pour trouver la valeur à partir de laquelle il y à 50% de chance d'avoir une carte gagnante, il faut résoudre l'équation suivante :

$$p(Y \geq 1) \geq 0{,}5$$

$$1 - \binom{x}{0} 0{,}005^0 \times 0{,}995^x \geq 0{,}5$$

$$1 - 0{,}995^x \geq 0{,}5$$

$$-0{,}995^x \geq -0{,}5$$

$$0{,}995^x \leq 0{,}5$$

$$x \ln(0{,}995) \leq \ln(0{,}5)$$

$$x \geq \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)} \quad \text{car} \quad \ln(0{,}99) < 0$$

$$x \geq 138{,}3$$

$$x \geq 139 \quad \text{car } x \text{ doit être un entier}$$

Pour que le client ait plus d'une chance sur deux de gagner à partir des cartes distribuées, il faudrait jouer avec au moins 139 cartes, soit un montant d'achats au minimum de 1 390€.

EXERCICE 2 (4 points)

1. Il faut construire le tableau de variation de f à partir de sa dérivée $f'(x)$.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-bx + b - 2}{1 - x} = 0$$

Un quotient est nul si son numérateur est nul, donc :

$$-bx + b - 2 = 0$$

$$b(1 - x) = 2$$

$$1 - x = \frac{2}{b}$$

$$x = 1 - \frac{2}{b} = \frac{b - 2}{b}$$

x	0	$\frac{b-2}{b}$	1
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variation de $f(x)$	0 ↗	$b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$	↘ ‖

Car $f(0) = b \times 0 + 2\ln(1-0) = 0$

Et $f\left(\frac{b-2}{b}\right) = b \times \frac{b-2}{b} + 2\ln\left(1-\left(\frac{b-2}{b}\right)\right) = b-2+2\ln\left(\frac{b-b+2}{b}\right) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$

Le maximum de $f(x)$ est atteint au point $\left(\left(\frac{b-2}{b}\right); \left(b-2+2\ln\frac{2}{b}\right)\right)$.

2. On cherche :

$$b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leq 1{,}6$$

On note : $g(b) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$

$g(b) = b-2+2\ln 2 - 2\ln b$ car $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$g'(b) = 1 - \frac{2}{b}$

On veut construire un tableau de signe, par conséquent on cherche : $g'(b) > 0$

$$1 - \frac{2}{b} > 0$$

$$\frac{2}{b} < 1$$

$$b > 2$$

La fonction $g(b)$ existe uniquement si b est supérieur ou égale à 0 car la fonction logarithme est défini uniquement sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b	2	α	$+\infty$
Signe de $g'(b)$	0	$+$	
Variation de $g(b)$	0 ↗	$1{,}6$ ↗	$+\infty$

La fonction $g(b)$ est donc croissante sur $[2;+\infty[$. Le calcul de $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b)$ étant trop complexe, on se place sur l'intervalle [2;10] avec $g(10) = 8 - 2ln5 \approx 4{,}78$

On remarque que $g(b)$ est continue, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $[2; 10]$. De plus $0 < 1{,}6 < 4{,}78$ donc $g(2) < g(\alpha) < \text{g}(10)$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel α tel que $g(\alpha) = 1{,}6$. D'après la calculatrice, la solution est $\alpha \approx 5{,}69$.

3. D'après l'énoncé $f'(x) = \frac{-5{,}69x+3{,}69}{1-x}$, on cherche $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$.

Or $f'(0) = 3{,}69$ et $f(0) = 0$. Donc on obtient $y = 3{,}69x$.

Par conséquent, il existe un triangle rectangle, à partir des points suivants : $(0; 0)$, $(1; 0)$, et $(1, 3{,}69)$. Donc, le côté adjacent à l'angle θ qui mesure 1 et le côté opposé 3,69. On obtient :

$$\tan\theta = \frac{3{,}69}{1} = 3{,}69$$

$$\arctan(3{,}69) \approx 74{,}8°$$

L'angle de tir est de 74,8°.

EXERCICE 3 (5 points)

1.a) On cherche l'équation paramétrique de la droite (AB) passant par A, et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 10k \\ y = -8k \\ z = 2k \end{cases}$$

On cherche l'équation paramétrique de la droite (CD) passant par C, et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 14-(-1) \\ 4-(-8) \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = -1 + 15k' \\ y = -8 + 12k' \\ z = 5 + 3k' \end{cases}$$

1.b) On veut si savoir (AB) et (CD) sont coplanaires. Si elles sont sécantes, on devrait avoir :

$$\begin{cases} 10k = -1 + 15k' \\ -8k = -8 + 12k' \\ 2k = 5 + 3k' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10k = -1 + 15k' \\ -8k = -8 + 12k' \\ 10k = 25 + 15k' \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 du système ci-dessus sont incompatible, ce système n'a pas de solution. Par conséquent (AB) et (CD) ne sont pas sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.

2.a) Pour I qui est sur (AB) on sait que :

$$\begin{cases} x = 10k \\ y = -8k \text{ et } x = 5 \\ z = 2k \end{cases}$$

$10k = 5$ donc $k = 0{,}5$

Alors,

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -8 \times 0{,}5 = -4 \\ z = 2 \times 0{,}5 = 1 \end{cases}$$

$I(5; -4; 1)$

Pour J qui est sur (CD) on sait que :

$$\begin{cases} x = -1 + 15k' \\ y = -8 + 12k' \text{ et } x = 4 \\ z = 5 + 3k' \end{cases}$$

$x = -1 + 15k' = 4$ donc $k' = 1/3$

Alors,

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -8 + 12 \times \dfrac{1}{3} = -4 \\ z = 5 + 3 \times \dfrac{1}{3} = 6 \end{cases}$$

$J(4; -4; 6)$

La distance IJ est donc : $IJ = \sqrt{(4-5)^2 + \left(-4-(-4)\right)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{1 + 0 + 25} = \sqrt{26}$

2.b) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$, de plus $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 4-(-4) \\ 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Pour montrer que des droites sont perpendiculaires, on peut calculer le produit scalaire des vecteurs.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ} = 10 \times (-1) + (-8) \times 0 + 2 \times 5 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux, ce qui signifie que les droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{IJ} = 15 \times (-1) + 12 \times 0 + 3 \times 5 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux, ce qui signifie que les droites (CD) et (IJ) sont perpendiculaires.

3.a) On sait que le point I appartient à (AB). (AB) et (CD) n'étant pas coplanaire, par conséquent I n'appartient pas à (CD). Les points C, D et I définissent un plan, le plan (CDI).
De plus J est un point de la droite (CD) donc il appartient au plan (CDI).
On sait aussi que Δ passe par I est qu'elle est parallèle à (CD), par conséquent Δ appartient au plan (CDI).

Ajoutons que (CD) est perpendiculaire à (IJ), toutes les droites étant parallèles à (IJ) seront orthogonal à la droite (CD), ce qui implique qu'elles seront sécantes.
Donc, la parallèle à la droite (IJ)passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

3.b) D'après la question précédente on a des droites (IJ) et $(M'P)$ sont par parallèles, ce qui implique que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires. On peut en déduire que le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{IP}$, et donc que les droites $(M'P)$ et Δ sont perpendiculaires.
Les droites (AB) et (CD) sont sécantes, donc Δ et (AB) sont sécantes, puisque Δ et (CD) sont parallèles.
Δ et (AB) sont sécantes en I et forment les plan (IMP).
On peut donc dire que le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (IMP).
Donc, il existe un triangle MPM' est ainsi rectangle en P.

3.c) Dans tous les triangles rectangles, le côté le plus long est l'hypoténuse, par conséquent $MM' > M'P$. Or $IJ = M'P$ car $IJM'P$ forme un parallélogramme. Donc on peut dire que $MM' > IJ$.
On a montré que pour tout point quelconque M, appartenant à (AB)), et M',appartenant à (CD) alors $MM' > IJ$, ce qui signifie que IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

EXERCICE 4 spé (5 points)

Partie A – un modèle simple

1.a) A partir de l'énoncé, on peut déduire que :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}1 & -2\,000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0{,}6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient donc : $A = \begin{pmatrix} 1{,}1 & -2\,000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0{,}6 \end{pmatrix}$

De plus, toujours d'après l'énoncé on note que $U_0 = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}$

1.b) On cherche à calculer U_6 or, d'après la question **1.a** on sait que : $U_6 = A \times U_5 = A^2 \times U_4 = A^3 \times U_3 = A^4 \times U_2 = A^5 \times U$, donc d'après la calculatrice :

$U_6 \approx \begin{pmatrix} 1\,882\,353{,}2 \\ 96{,}47 \end{pmatrix}$ C'est-à-dire 96 renards et 1 882 353 campagnols.

2.a) Pour répondre à cette question nous allons utiliser un raisonnement par récurrence.

- Initialisation

Pour $n = 0$, on a $P \times D^n \times P^{-1} \times U_0 = U_0$ car $D^0 = I_2$ = la matrice identité d'ordre 2

- Hérédité

On suppose la propriété $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$ vraie.

$$U_{n+1} = A \times U_n$$
$$U_{n+1} = P \times D \times P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$$
$$U_{n+1} = P \times D \times P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$$
$$U_{n+1} = P \times D \times I \times D^n \times P^{-1} \times U_0$$
$$U_{n+1} = P \times D \times D^n \times P^{-1} \times U_0$$
$$U_{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1} \times U_0$$

- Conclusion

Pour tout n, entier naturel, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

2.b) $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}$ car D est une matrice diagonale.

2.c) On cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$ car $0{,}7 \in]0;1[$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2{,}8\times10^7}{15} + \frac{2\times10^6}{15} \times 0{,}7^n = \frac{2{,}8\times10^7}{15} \approx 1\,866\,667$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1400}{15} + \frac{400}{15} \times 0{,}7^n = \frac{1400}{15} \approx 93$

A terme, les populations de campagnols et de renards vont diminuer, pour se stabiliser respectivement à 1 866 667 et 93.

Partie B – Un modèle plus conforme à la réalité

1. Afin de remplir le tableur il faut écrire :
En B4 : $= 1{,}1 * B3 - 0{,}001 * B3 * C3$
En C4 : $= 2 * 10\text{^}(-7) * B3 * C3 + 0{,}6 * C3$

2. Le nombre de renard baisse continuellement, cependant on observe que le nombre campagnols commence à croitre en $n = 9$, autrement dit en 2021.

Partie C

Pour trouver l'état stable, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = 0 \\ v_{n+1} - v_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,1u_n - 0,001u_n \times v_n = 0 \\ 2 \times 10^{-7}u_n \times v_n - 0,4v_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,1u_n(1 - 0,01v_n) = 0 \\ 2v_n(0,2 - 10^{-7}u_n) = 0 \end{cases}$$

De plus, on suppose que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$.

$$\begin{cases} (1 - 0,01v_n) = 0 \\ (0,2 - 10^{-7}u_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,01v_n = 1 \\ 10^{-7}u_n = 0,2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n = 100 \\ u_n = 2\,000\,000 \end{cases}$$

La population, afin qu'elle puisse rester stable, doit être composée de 100 renards et de 2 millions de campagnols.