

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Un commerçant reçoit les résultats d'une étude de marché sur les habitudes des consommateurs en France.

Selon cette étude :

- 54 % des consommateurs privilégient les produits de fabrication française ;
- 65 % des consommateurs achètent régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique, et parmi eux 72 % privilégient les produits de fabrication française.

On choisit un consommateur au hasard. On considère les événements suivants :

- B : « un consommateur achète régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique » ;
- F : « un consommateur privilégie les produits de fabrication française ».

On note $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $P_C(A)$ la probabilité de A sachant C .

1. Justifier que $P(\overline{B} \cap F) = 0,072$.
2. Calculer $P_F(\overline{B})$.
3. On choisit un consommateur n'achetant pas régulièrement des produits issus de l'agriculture biologique.
Quelle est la probabilité qu'il privilégie les produits de fabrication française ?

Partie B

Le commerçant s'intéresse à la quantité en kilogramme de farine biologique vendue chaque mois au détail dans son magasin. Cette quantité est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 90$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Au début de chaque mois, le commerçant s'assure d'avoir 95 kg dans son stock.
Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas répondre à la demande des clients durant le mois ?
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que $P(X < a) = 0,02$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette étude de marché, il est précisé que 46,8 % des consommateurs en France privilégient des produits locaux. Le commerçant constate que parmi ses 2500 clients, 1025 achètent régulièrement des produits locaux.

Sa clientèle est-elle représentative des consommateurs en France ?

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.

Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 10e^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$u(x) = -e^{\frac{2-x}{10}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$.

En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

2. a. Calculer $f(20)$.

En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.

On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.

On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0; +\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1 + u(x)).$$

a. Déterminer les variations de f' sur $[0; +\infty[$.

b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre. Cette île, étant le point de convergence de nombreuses tortues, des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 100 mètres.

Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x; y; z)$ avec $z < 0$ se situe dans l'océan.

La modélisation des spécialistes établit que :

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite \mathcal{D}_1 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases} \text{ avec } t \text{ réel ;}$$

- la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite \mathcal{D}_2 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 10k \\ y = 2 + 6k \\ z = -4k \end{cases} \text{ avec } k \text{ réel.}$$

1. Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.
2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

- a. Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}$ est normal aux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

- b. On admet que la distance minimale entre les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est la distance HH' où $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur colinéaire à \vec{n} avec H appartenant à la droite \mathcal{D}_1 et H' appartenant à la droite \mathcal{D}_2 .

Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.

On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel.

► Calcul formel

1

Résoudre($\{10k-3t=3l, 2+6k-6t=13l, -4k+3t=27l\}, \{k, l, t\}$)

$$\rightarrow \left\{ \left\{ k = \frac{675}{1814}, \ell = \frac{17}{907}, t = \frac{603}{907} \right\} \right\}$$

3. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.
Elle est repérée par le point B de coordonnées $(2; 4; 0)$.
- Soit M un point de la droite \mathcal{D}_1 .
Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
 - En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

EXERCICE 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que :

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + iz_B = z_C + iz_D \end{cases}$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

EXERCICE 5 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n , on note F_n le n -ième nombre de Fermat. Il est défini par :

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Partie A :

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers ».

L'objectif est de tester cette conjecture.

- Calculer F_0 , F_1 , F_2 et F_3 .
 - Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?
- On considère l'algorithme ci-dessous :

```
F ← 225 + 1
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
  N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

F%N désigne le reste de la division euclidienne de F par N.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.

Que peut-on en déduire ?

Partie B :

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$.
- Pour tout entier naturel n on note :

$$\prod_{i=0}^n F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \dots \times F_{n-1} \times F_n.$$

On a donc $\prod_{i=0}^n F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i \right) \times F_n.$

Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2.$$

- Justifier que, pour tous entiers naturels n et m tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n - qF_m = 2$.
- En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.