Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Spécialité Série S – Centres étrangers

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l’enseignement de spécialité

Durée de l’épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

L’usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site
www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (4 points)

1. a)
À l'aide de la calculatrice, on cherche $f(20) = (0{,}8*20+0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5*20}+0{,}03$
On trouve finalement $\boxed{f(20)=0{,}031}$

1. b)
On remarque dans le tableau de variations que le maximum de la fonction f sur [0; 20] se trouve en t=1,75, car la dérivée de f est nulle en ce point.
Alors, le maximum du taux de CO_2, correspondant au maximum de la fonction f, est de
$\boxed{f(1{,}75)=(0{,}8*1{,}75+0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5*1{,}75}+0{,}03=0{,}697}$

2. a)
Pour que le taux de CO_2 soit égal à 3,5 %, il faut que la fonction f soit égale à 0,035. Or, la fonction vaut 0,23 en t=0, puis elle est strictement croissante. Comme f est continue, on peut utiliser la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, qui affirme donc que f ne peut pas être égale à 0,035 sur [0; 1,75].
Ensuite, f est strictement décroissante, et vaut 0,031 en t=20. Donc, comme f est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, qui affirme que toute valeur comprise dans l'intervalle [0,031; 0,697] est atteinte une unique fois pour $t \in [1{,}75\,;20]$.
Donc il existe bien un unique instant T tel que $f(T)=0{,}035$.

2. b)
Nous allons étudier ce programme plus en détail, qui a pour but de chercher une estimation de la valeur T après laquelle f tombe en dessous de 0,035.
Les 3 premières lignes servent d'abord à introduire les conditions initiales. On part de t=1,75, car on sait que l'affixe T est supérieure à 1,75 d'après la question précédente.
V correspond à la valeur de f, on pose alors V=f(1,75)=0,7 dès le début. Puis, p correspond au pas qu'on va utiliser pour parcourir les valeurs de f.
Alors, tant qu'on est au dessus de 0,035, on continue à avancer de 0,1 et on met à jour la valeur de V (qui est égale à f(t)). Dès qu'on passe en dessous de 0,035, la boucle Tant Que s'arrête, et la variable t correspond à une approximation de T défini à la question précédente.
L'exécution de ce programme à la calculatrice donne T=15,75. C'est à dire qu'il faut attendre 15 minutes et 45 secondes pour obtenir un taux de CO_2 inférieur ou égal à 3,5 %.

3. a)
Pour vérifier que F est une primitive de f, on prend la dérivée de F et on vérifie qu'elle soit égale à f.
On rappelle déjà que $(u*v)'=u'*v+u*v'$ et $(\mathrm{e}^u)'=u'\mathrm{e}^u$
Ainsi, on a $F'(t)=(-1{,}6)\mathrm{e}^{-0{,}5t}+(-1{,}6t-3{,}6)(-0{,}5\mathrm{e}^{-0{,}5t})+0{,}03$
Donc $\boxed{F'(t)=(0{,}8t+0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t}+0{,}03=f(t)}$ en factorisant par $\mathrm{e}^{-0{,}5t}$: CQFD.

3. b)

On rappelle l'expression de la valeur moyenne de f sur [0 ;T] : $\langle f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$

Alors, en l'appliquant ici, on obtient :

$$V_m = \frac{1}{11}\int_0^{11} f(t)\,dt = \frac{1}{11}(F(11) - F(0))$$

Avec la calculatrice, on trouve F(11)=0,243 et F(0)=-3,6.
Finalement, on a $\boxed{V_m = 0{,}349}$.

EXERCICE 2 (4 points)

1.
On a d'abord $P(D \leqslant t) = 1 - P(D \geq t)$, et également $P(D \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
Alors on obtient $P(D \geq t) = e^{-\lambda t}$.

La durée de vie moyenne de vie de l'oscilloscope est de 8 ans, alors $\lambda = \frac{1}{8}$.

On cherche $P_{(D\geq 3)}(D \geq 10) = P_{(D\geq 3)}(D \geq 3+7) = P(D \geq 7)$ car il s'agit d'une loi à durée de vie sans vieillissement.

Ainsi, $P(D \geqslant 7) = e^{-7/8}$ car comme la durée de vie moyenne de vie de l'oscilloscope est de 8 ans, alors $\lambda = \frac{1}{8}$.

On obtient finalement $\boxed{P(D \geqslant 7) \approx 0{,}42 \text{ : l'affirmation est VRAIE.}}$

2.
D'après l'étude réalisée, on sait qu'un automobiliste a une probabilité de 0,031 d'être contrôlé positif au test d'alcoolémie.
On réalise n=200 tests d'alcoolémie, suivant une loi de Bernouilli de probabilité p=0,031.
Ces 200 tests sont indépendants. Alors le nombre de tests positifs suit une loi Binomiale de paramètres (n=200, p=0,031).
La calculatrice, à l'aide de la commande *binomFrép(n ;p ;k)*, nous permet de calculer $P(X \leqslant k)$. Mais on rappelle $P(X > k) = 1 - P(X \leqslant k)$.
Ainsi, on trouve $\boxed{P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5) \approx 0{,}59 \text{ : l'affirmation est VRAIE.}}$

3.
On pose la fonction $f(x) = \ln(6x-2) + \ln(2x-1) - \ln(x)$, et on étudie ses variations.

On rappelle que $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Ainsi, on a $f'(x)=\frac{6}{6x-2}+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}$

Et $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6}{6x-2}+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}=0$

$\Leftrightarrow 6x(2x-1)+2x(6x-2)-(6x-2)(2x-1)=0$ car x, 6x-2 et 2x-1 ne s'annulent pas sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

$\Leftrightarrow 12x^2-2=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pm 1}{\sqrt{6}}$, mais on doit avoir x>0,5.

Donc la fonction f est strictement monotone sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ car elle n'admet pas d'extremum sur cet intervalle. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f ne peut alors s'annuler qu'une unique fois, donc l'équation $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$ admet au plus une solution : l'affirmation est FAUSSE.

<u>Remarque :</u> On aurait pu démontrer que cette équation n'a aucune solution sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

4.

On a l'équation $(4z^2-20z+37)(2z-7+2i)=0$, or elle est équivalente à :

$\Leftrightarrow 4z^2-20z+37=0 \quad OU \quad 2z-7+2i=0$

Étudions les racines du polynôme $4z^2-20z+37=0$, on a $\Delta=20^2-4*4*37=-192$

Alors $4z^2-20z+37=0 \Leftrightarrow z=\frac{20\pm\sqrt{192}i}{8}$

Nos trois solutions sont donc : $S=\left\{z_1=\frac{20+\sqrt{192}i}{8}, z_2=\frac{20-\sqrt{192}i}{8}, z_3=\frac{7-2i}{2}\right\}$.

Maintenant, pour vérifier que toutes ces affixes appartiennent au même cercle de centre P d'affixe $z_P=2$, on vérifie que la distance de tous ces points à P est la même, car c'est ce qui caractérise un cercle : tous ses points sont à la même distance du centre.

On a donc :

– pour z_1 :

$$|z_P-z_1|=|2-\frac{20+\sqrt{192}i}{8}|=|2-\frac{20+8\sqrt{3}i}{8}|=|2-\frac{5}{2}+i\sqrt{3}|=|\frac{-1}{2}+i\sqrt{3}|=\sqrt{(\frac{1}{4}+3)}=\sqrt{3{,}25}$$

– pour z_2 : $|z_P-z_2|=|z_P-z_1|=\sqrt{3{,}25}$ en passant au conjugué

– pour z_3 : $|z_P-z_3|=|2-\frac{7}{2}-i|=|\frac{-3}{2}-i|=\sqrt{(\frac{9}{4}+1)}=\sqrt{3{,}25}$

On trouve alors que tous ces points sont à la même distance de P : ils appartiennent bien à un même cercle de centre le point P d'affixe 2 : l'affirmation est VRAIE.

EXERCICE 3 (7 points)

Partie A

1.
Un melon est conforme que si sa masse est comprise entre 900g et 1200g d'après l'énoncé, et ici, la masse d'un melon suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850, x], x \geqslant 1200$.
Si 75 % des melons sont conformes, alors 75 % de l'intervalle précédent doit être compris entre 900 et 1200. Cette proportion s'écrie $\frac{1200-900}{x-850}$.

Ainsi, on a $\frac{1200-900}{x-850} = 0{,}75$

Donc $1200-900 = 0{,}75(x-850)$ Donc $\boxed{x = \frac{300}{0{,}75} + 850 = 1250}$

2.
On a $P(900 \leqslant M_B \leqslant 1200) = 0{,}85$
On a une loi normale, et 1050 est au milieu de l'intervalle $[900, 1200]$, donc

$$\begin{aligned} P(900 \leqslant M_B \leqslant 1200) &= 2 * P(1050 \leqslant M_B \leqslant 1200) \\ &= 2*(P(M_B \leqslant 1200) - P(M_B < 1050)) \\ &= 2*(P(M_B < 1200) - 0{,}5) \end{aligned}$$

Donc $P(900 \leqslant M_B \leqslant 1200) = 0{,}85 \Leftrightarrow P(M_B \leqslant 1200) = \frac{0{,}85}{2} + 0{,}5 = 0{,}925$

Donc, en passant en loi normale centrée réduite, on a
$$P\left(\frac{M_B - 1050}{\sigma} \leqslant \frac{1200-1050}{\sigma}\right) = 0{,}925$$
En utilisant la fonctionnalité *FracNormale(0,925 ;0 ;1)* de la calculatrice, on peut retrouver la valeur de $\frac{1200-1050}{\sigma}$.
On trouve $\frac{1200-1050}{\sigma} \approx 1{,}44$
Donc $\boxed{\sigma = \frac{1200-1050}{1{,}44} = 104}$

3.
On cherche l'intervalle de fluctuation à 95 % qui concerne la proportion de melons conformes dans un échantillon. On vérifie d'abord les premières hypothèses nécessaires à l'utilisation d'un intervalle de fluctuation :
$n = 400 \geqslant 30$
$np = 400 * 0{,}8 = 320 \geqslant 5$
$n(1-p) = 400 * 0{,}2 = 80 \geqslant 5$

Ainsi, on peut maintenant écrire notre intervalle de fluctuation à 95 %, on rappelle déjà que :

$$I=[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]=[0{,}8-196\frac{\sqrt{0{,}8*0{,}2}}{\sqrt{400}};0{,}8+1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8*0{,}2}}{\sqrt{400}}]$$

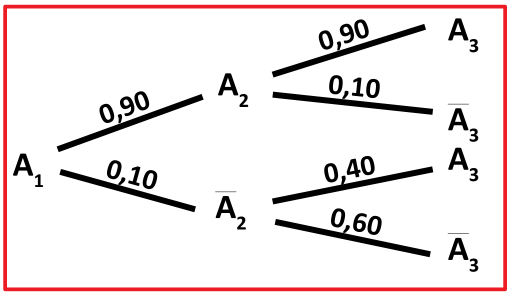
Donc, cela donne :

$$I=[0{,}76;0{,}84] \quad .$$

Or, le marchant a envoyé une proportion de 294/400 = 0,74 melons conformes, ce qui ne se trouve pas dans l'intervalle de fluctuation à 95 % : le détaillant a raison de se méfier de l'affirmation du maraîcher C.

Partie B

1. a)



1. b)

D'après la loi des probabilités totales :

$P(A_3)=P(A_3\cap A_2)+P(A_3\cap \bar{A}_2)$ car {A_2,$\bar{A}_2$} forme un système complet d'événements.

Donc $P(A_3)=P(A_2)P_{A_2}(A_3)+P(\bar{A}_2)P_{\bar{A}_2}(A_3)$ avec la formule des probabilités conditionnelles.

Ce qui donne $\boxed{P(A_3)=0{,}90*0{,}90+0{,}10*0{,}40=0{,}85}$

1. c)

D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_{A_3}(A_2)=\frac{P(A_2\cap A_3)}{P(A_3)}=\frac{P_{A_2}(A_3)P(A_2)}{P(A_3)}$$

Ce qui donne $\boxed{P_{A_3}(A_2)=\frac{0{,}90*0{,}90}{0{,}85}=0{,}95}$

2.

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\boxed{p_{n+1}}&=P(A_{n+1}\cap A_n)+P(A_{n+1}\cap \bar{A}_n)\\&=P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(\bar{A}_n)P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})\\&=0{,}90*P(A_n)+0{,}40(1-P(A_n))\\&\boxed{=0{,}5p_n+0{,}4}\end{aligned}$$

3. a)

On va suivre un raisonnement par récurrence.

<u>Initialisation :</u>

$p_1 = 1 > 0{,}8$

<u>Hérédité :</u>

On suppose qu'il existe n>0 tel que $p_n > 0{,}8$.

Alors $p_{n+1} = 0{,}5\,p_n + 0{,}4 > 0{,}5 * 0{,}8 + 0{,}4 = 0{,}8$: hypothèse vérifiée au rang n+1.

<u>Conclusion :</u>

Pour tout n>0, $p_n > 0{,}8$

3. b)

On va suivre un raisonnement par récurrence.

<u>Initialisation :</u>

$p_2 = 0{,}5 * 1 + 0{,}4 = 0{,}9 < p_1$

<u>Hérédité :</u>

On suppose qu'il existe n>0 tel que $p_n > p_{n+1}$.

Alors $0{,}5\,p_n > 0{,}5\,p_{n+1} \Rightarrow 0{,}5\,p_n + 0{,}4 > 0{,}5\,p_{n+1} + 0{,}4 \Rightarrow p_{n+1} > p_{n+2}$: hypothèse vérifiée au rang n+1.

<u>Conclusion :</u>

Pour tout n>0, $p_n > p_{n+1}$: (p_n) est donc décroissante.

3. c)

(p_n) est décroissante, donc soit elle tend vers une limite finie soit vers $-\infty$. Or, (p_n) est minorée par 0,8, donc nécessairement, (p_n) est convergente.

4. a)

$v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5\,p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5(p_n - 0{,}8) = 0{,}5\,v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5, et de premier terme $v_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

4. b)

Alors, $v_n = 0{,}2 * (0{,}5)^{n-1}$ par caractérisation d'une suite géométrique.

Et $p_n = v_n + 0{,}8 = 0{,}2 * (0{,}5)^{n-1} + 0{,}8$.

4. c)

On sait que $\lim_{n \to +\infty} (0{,}5)^{n-1} = 0$ car $0{,}5 < 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8$.

EXERCICE 4 spécialité (5 points)

1. a)

On vérifie à la calculatrice, le reste de la division euclidienne de 8^7 par 55. Pour ce fait, on divise 8^7 par 55, et on multiplie la partie décimale par 55. On retrouve bien $8^7 \equiv 2[55]$.

Ainsi, $8^7 \equiv 2[55]$.

Par ailleurs $8^{21} = (8^7)^3 \equiv 2^3[55]$ donc $\boxed{8^{21} \equiv 8[55]}$.

1. b)

On a $\boxed{8^2 = 64 = 1*55+9 \equiv 9[55]}$

Donc $8^{21}*8^2 = 8^{23} \equiv 8*9[55]$

Donc $\boxed{8^{23} \equiv 17[55]}$. Comme 17<55, on peut donc conclure que 17 est le reste de la division de 8^{23} par 55.

2. a)

23 et 40 sont premiers entre eux, car 23 est un nombre premier. Ainsi, par le théorème de Bezout, il existe une combinaison linéaire de ces deux nombres égale à 1. Autrement dit, il existe un couple (x_0; y_0) d'entiers relatifs tels que $23x_0 + 40y_0 = 1$.

Finalement, en prenant $x_1=x_0$ et $y_1=-y_0$, le couple (x_1; y_1) est solution de l'équation $23x - 40y = 1$: l'équation (E) admet au moins un couple solution.

2. b)

Avec la calculatrice, on va dans *f(x)*, et on entre $Y_1=23X$ pour la première fonction et $Y_2=40X$ pour la deuxième fonction. On utilise maintenant l'outil *TABLE*, et on cherche deux valeurs dont la différence fait 1.

On trouve ainsi $x_0=7$ et $y_0=4$ et $23*7-40*4=161-160=1$: ($x_0=7$; $y_0=4$) est solution de (E).

2. c)

On a : $23x - 40y = 1$ et $23x_0 - 40y_0 = 1$, donc $23(x-x_0) - 40(y-y_0) = 0$

Donc $23(x-x_0) = 40(y-y_0)$

Or, comme 23 et 40 sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, on obtient que $23\, divise\, (y-y_0)$ et $40(y-y_0)\, divise\, (x-x_0)$.

Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(y-y_0) = 23k \Rightarrow y = 23k+4$, et comme $23(x-x_0) = 40(y-y_0)$, alors $(x-x_0) = 40k \Rightarrow x = 40k+7$

Ainsi, les solutions sont $\boxed{S = \{(40k+7; 23k+4), k \in \mathbb{Z}\}}$

2. d)

Soit d tel que $23d \equiv 1[40]$. Alors, par une division euclidienne, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $23d = 40q+1 \Rightarrow 23d - 40q = 1$: on reconnaît l'équation E. Ainsi, $d = 40k+7, k \in \mathbb{Z}$, donc d=7 est l'unique solution comprise entre 0 et 39.

3. a)
$\boxed{N=5*11=55 \quad \text{et} \quad n=4*10=40}$, puisque 40 est bien premier avec c=23, c vérifie bien la condition demandée.

3. b)
b est le reste de la division euclidienne de 55 par 8^{23}. Or, d'après la question **1.b.**, $8^{23} \equiv 17[55]$. Donc $\boxed{b=17}$.

4. a)
On cherche dans un premier temps l'unique d positif inférieur strictement à 40 tel que $23d \equiv 1[40]$. Donc, d'après la question **2.d.**, l'unique solution de cette équation est $\boxed{d=7}$.

4. b)
Ensuite, on cherche le reste de la division euclidienne de 17^7 par 55. En utilisant la calculatrice comme à la question **1.a.**, on trouve que $17^7 \equiv 8[55]$.
Alors, on retrouve bien $\boxed{a=8}$.