Corrigé du bac 2018 : Mathématiques Spécialité Série S – Liban

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Correction proposée par un professeur de mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (3 points)

1. En ce qui concerne le temps d'attente : sachant que X suit une loi exponentielle, on sait que sa moyenne d'une loi exponentielle se calcule avec $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, de plus, d'après l'énoncé $\lambda = 0{,}02$. Donc $E(X) = \frac{1}{0{,}02} = 50$. En moyenne, le temps d'attente dure 50 secondes.

En ce qui concerne le temps d'échange : sachant que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(96; 26^2)$, on sait que la moyenne d'une loi normale est μ, or $\mu = 96$. En moyenne, le temps d'échange dure 96 secondes.

La durée totale moyenne d'un appel est calculé avec $E(X) + E(Y) = 50 + 96 = 146$.

Il dure 146 secondes, autrement dit 2 minutes et 26 secondes.

2.a) 2 minutes équivalent à 120 secondes, par conséquent on cherche :

$P(X \geq 120) = e^{-\lambda \times 120} = e^{-0{,}02 \times 120} = e^{-2{,}4} \approx 0{,}0907$.

Il y a 9,07% de chance que l'appelant attende plus de 2 minutes lorsqu'il appelle le standard téléphonique.

2.b) On cherche : $P(Y < 90)$ or on sait que Y suit une loi normale avec $\mu = 96$.
Donc $P(Y < 90) = 0{,}5 - P(90 < Y < 96)$.
D'après la calculatrice, on obtient :
STAT → DIST → NORM → Ncd → $NormCD(90\ ,\ 96\ ,26\ ,\ 96) \approx 0{,}4087$
Le temps d'échange est inférieur à 90 secondes uniquement dans approximativement 40,87% des cas.

3. On cherche $P_{X>60}(X < 60 + 30)$
Or $P_{X>60}(X < 60 + 30) = 1 - P_{X>60}(X > 60 + 30)$
Grâce à la durée de vie sans vieillissement on obtient :

$$P_{X>60}(X < 60 + 30) = 1 - P(X > 30) = P(X \leq 30)$$

Le fait de raccrocher n'augmente par les chances de limiter à 30 seconde l'attente supplémentaire.

EXERCICE 2 (3 points)

1. On sait que $|1 + i| = \sqrt{2}$, par conséquent on obtient une forme exponentielle de $1 + i$ telle que :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

En ce qui concerne la forme trigonométrique de $1+i$:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

On remarque que $1-i=\overline{1+i}$, on obtient donc pour la forme exponentielle de $1-i$:

$$1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

La forme de trigonométrique de $1-i$ est :

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

2.a) Le formule d'Euler est : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$$S_n=(1+i)^n+(1-i)^n$$

$$S_n=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$

$$S_n=\sqrt{2}^n e^{\frac{ni\pi}{4}}+\sqrt{2}^n e^{-\frac{ni\pi}{4}}$$

$$S_n=\sqrt{2}^n\left(e^{\frac{ni\pi}{4}}+e^{-\frac{ni\pi}{4}}\right)$$

$$S_n=\sqrt{2}^n\times 2\left(\frac{e^{\frac{ni\pi}{4}}+e^{-\frac{ni\pi}{4}}}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{S_n=2\sqrt{2}^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

2.b) <u>L'affirmation A est vraie</u>, nous l'avons démontré à la question précédente.

Afin de trouver la forme trigonométrique de S_n à partir de sa forme algébrique, nous alors calculer le module et l'argument de S_n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{n\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Signe $\cos\frac{n\pi}{4}$	+	+	0	-	-	-	0	+	+

On conclue de ce tableau que :

- Si $n=2+4k$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors $S_n=0$.

Par conséquent, <u>l'affirmation B est vraie</u>.

Ajoutons que :

- $S_n>0$ si $n=8k$ ou $n=1+8k$ ou $n=7+8k$
  donc on a : $S_n=\left|2\left(\sqrt{2}\right)^n\times\cos\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)\right|\times(\cos 0+i\sin 0)$

- $S_n < 0$ si $n = 3 + 8k$ ou $n = 4 + 8k$ ou $n = 5 + 8k$
  donc on a : $S_n = \left|2\left(\sqrt{2}\right)^n \times \cos\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)\right| \times (\cos\pi + i\sin\pi)$

EXERCICE 3 (4 points)

1.a) Au début, les coordonnées du sous-marin sont $S_1(0)(140; 105; -170)$ car

$$\begin{cases} x(0) = 140 - 60 \times 0 = 140 \\ y(0) = 105 - 90 \times 0 = 105 \\ z(0) = -170 - 30 \times 0 = -170 \end{cases}$$

1.b) La vitesse résulte de la dérivée des coordonnées cartésiennes de position par rapport au temps, par conséquent :

$$\overrightarrow{v_1(t)} \begin{cases} x_1(t) = -60 \\ y_1(t) = -90 \\ z_1(t) = -30 \end{cases}$$

$$\left|\overrightarrow{v_1(t)}\right| = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{v_1(t)}\right| = 30\sqrt{14} \approx 112{,}25 \text{ m/min}$$

0,11225 km/min

6,735 km/h

La vitesse du sous-marin est de 6,735 kilomètres par heure.

2. Pour $t = 0$, on sait que $S_1(0) = A(140; 105; -170)$.
Pour $t = 1$, on sait que $S_1(1) = B(80; 15; -200)$.
On considère C comme un point appartenant au plan vertical de la trajectoire du premier sous-marin, tel que $C(80; 15; -170)$.
Le plan ABC correspond donc au plan vertical de la trajectoire du premier sous-marin.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 80 - 140 \\ 15 - 105 \\ -200 - (-170) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 80 - 140 \\ 15 - 105 \\ -170 - (-170) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le repère étant orthonormé on sait que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\alpha$. De plus :

$$AB = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} = \sqrt{12600}$$

$$AC = \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (0)^2} = \sqrt{11700}$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \sqrt{12600} \times \sqrt{11700} \times \cos\alpha$
$\sqrt{12600} \times \sqrt{11700} \times \cos\alpha = 0$
car $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ puisque le repère est orthonormé
Donc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11700}}{\sqrt{12600}} \approx 15{,}5°$

3.

$$\overrightarrow{v_2(t)}\begin{cases} x_2(t) = x_2(0) + at \\ y_2(t) = y_2(0) + bt \\ z_2(t) = z_2(0) + ct \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_2(t)}\begin{cases} x_2(t) = 68 + at \\ y_2(t) = 135 + bt \\ z_2(t) = -68 + ct \end{cases}$$

On sait que $S_2(3) = (-202; -405; -248)$ donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_2(3) = 68 + 3a = -202 \\ y_2(3) = 135 + 3b = -405 \\ z_2(3) = -68 + 3c = -248 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 68 + 3a = -202 \\ 135 + 3b = -405 \\ -68 + 3c = -248 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a = -202 - 68 \\ 3b = -405 - 135 \\ 3c = -248 + 68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -90 \\ b = -180 \\ c = -60 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{v_2(t)}\begin{cases} x_2(t) = 68 - 90t \\ y_2(t) = 135 - 180t \\ z_2(t) = -68 - 60t \end{cases}$$

Si les 2 sous-marins sont à la même profondeur, autrement dit le même z, alors on a :

$-170 - 30t = -68 - 60t$

$30t = 102$

$t = 3{,}4$ minutes

Les 2 sous-marins sont à la même profondeur après 3 minutes et 24 secondes.

EXERCICE 4 (5 points)

1. On sait que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$. On pose : $u = \ln x$ et $v = x^n$ donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v' = nx^{n-1}$. Donc :

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - nx^{n-1}\ln x}{(x^n)^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{x^{-1} \times x^n - nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}$$

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}}$$

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1} \times (1 - n\ln x)}{x^{2n}}$$

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln x}{x^{2n-n+1}}$$

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$$

2. Pour cherche à déterminer le tableau de variation pour trouver les coordonnées du maximum A_n.

$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}} = 0$$

Une fraction est nulle si le numérateur est nul.

$$1 - n\ln x = 0$$

$$\ln x = \frac{1}{n}$$

$$x = e^{\frac{1}{n}}$$

x	1	$x_{An} = e^{\frac{1}{n}}$	5
Signe de $f_n'(x)$	$+$	0	$-$
Variation de f_n	0 ↗	$\frac{1}{e}\ln(x)$	↘ $\frac{\ln 5}{5^n}$

Car $f(1) = \frac{\ln(1)}{1^n} = 0$

$f(5) = \frac{\ln(5)}{5^n}$

et $f\left(e^{\frac{1}{n}}\right) = y_{An} = \frac{\ln e^{\frac{1}{n}}}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\frac{1}{n}}{e^1} = \frac{1}{e}\ln e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e \times n} = \frac{1}{e}\ln x_{An}$

On obtient $A_n\left(e^{\frac{1}{n}}; \frac{1}{e\times n}\right)$ et on a prouvé que A_n appartient à la courbe Γ d'équation $y = \frac{1}{e}\ln(x)$.

3.a) On sait que $\ln x$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1; 5]$, par conséquent :

$$\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5)$$

$$0 \leq \ln(x) \leq \ln(5)$$

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}$$

3.b)

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}dx = \int_1^5 x^{-n}dx$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}dx = \frac{5^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}dx = \frac{5^{-n+1} - 1^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

3.c)

$$I_n = \int_1^5 f_n dx = \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}dx$$

D'après la question précédente on sait que :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$$

car $\frac{1}{5} \in \left]-1;1\right[$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$$

Avec la question **3.a)** :

$$0 \leq \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx \leq \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx$$

Si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = 0$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

La valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$ est 0.

EXERCICE 5 Spé (5 points)

1.
$A \leftarrow 0$
$B \leftarrow 1$
Pour i allant de 2 à n :
| $C \leftarrow A + B$
| $A \leftarrow B$
| $B \leftarrow C$
Fin Pour

2. On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \times A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 2+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A \times A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 2+1 \\ 3+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$A^5 = A \times A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+3 & 3+2 \\ 5+0 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.a)

$A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} a_{p+1} \times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} \times a_q + a_p \times a_{q-1} \\ \boldsymbol{a_p} \times \boldsymbol{a_{q+1}} + \boldsymbol{a_{p-1}} \times \boldsymbol{a_q} & a_p \times a_q + a_{p-1} \times a_{q-1} \end{pmatrix}$

$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$

3.b) <u>Méthode 1 :</u>
On suppose que : $a_p = r \times k$ et $a_q = r \times k'$
D'après la question précédente on sait que :

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$$

$$a_{p+q} = r \times k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times r \times k'$$

$$a_{p+q} = r \times (k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k')$$

Si r divise a_p et a_q alors r divise aussi a_{p+q}

<u>Méthode 2 :</u>

$a_p \equiv 0\ [r]$ et $a_q \equiv 0\ [r]$ alors $a_p \times a_{q+1} \equiv 0\ [r]$ et $a_{p-1} \times a_q \equiv 0\ [r]$

Donc $a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q \equiv 0\ [r]$ ce qui signifie que $a_{p+q} \equiv 0\ [r]$.

3.c) Pour répondre à cette question nous allons utiliser un raisonnement par récurrence.

- Initialisation

Pour $n = 1$, on a $a_{np} = a_p$ donc a_p divise a_{np}

- Hérédité

a_p divise a_{np}
$a_{(n+1)p} = a_{np+p}$ par conséquent a_p divise également $a_{(n+1)p}$

- Conclusion

Pour tout n, entier naturel, a_p divise a_{np}

4.a) On sait que $n > 5$.
L'entier n n'est pas un nombre premier, par conséquent il est divisible par 2 entiers naturels tels que p et q, autrement dit $n = pq$ avec p et q différent de n et de 1. De plus, d'après la question précédente a_p divise $a_{pq} = a_n$. Donc a_n ne peut pas être un nombre premier.

4.b) Grâce à cet exemple, on peut dire que la réciproque de **4.a)** n'est pas vraie, car 19 est un nombre premier, au contraire de 4181 qui est divisible par 37 et 113.